BÎRKARÎ

AMADEYÎ

3

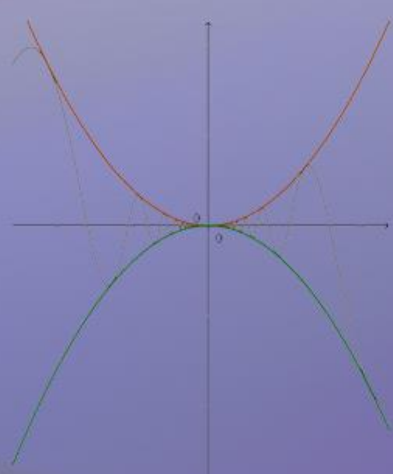
NAVEROK

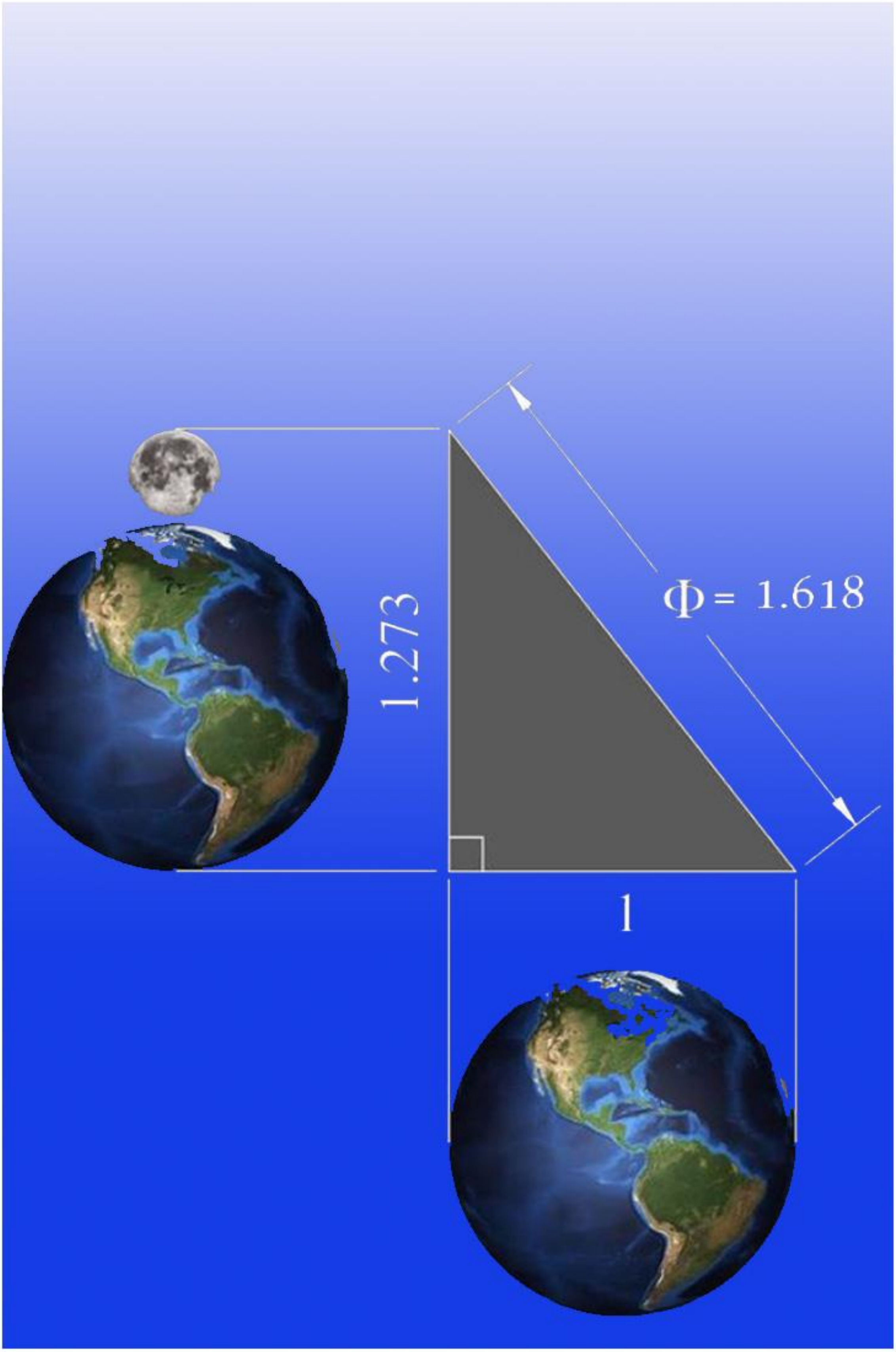
ANALÎZ

BEŞA YEKEM

DAWÎ Û DOMDARÎ

1) Dawî
2) Rewşên nediyar
3) Domdarî




Φ = 1.618
1.273
1

DAWÎ

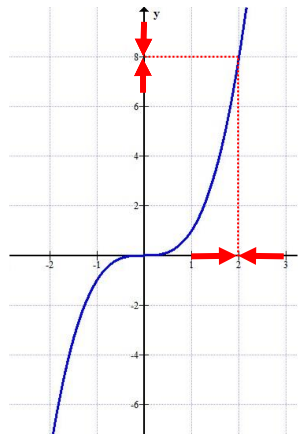
Têgeha **dawî**, yek ji têgehên bingehîn e di analîza bîrkarî de, ew jî girêdayî ye bi tevgera fonksiyonekê ve dema ku nenasê wê nêzîkî hejmarekê bibe yan jî nêzîkî bêdawî bibe.

Dîtina dawiya fonksiyonekê

Ji bo dîtina dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f(x)}$ dema ku $\boldsymbol{x \to a}$, em $\boldsymbol{x = a}$ di fonksiyonê de bi cih bikin.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ fonksiyonek be, di dema ku $\boldsymbol{x \to 2}$, dawiya fonksiyonê bibîne.



Çareserî:

x	…	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	…
$f(x)$	...	4.91	5.83	6.85	8	9.26	10.64	…

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

Wateya wê ew e ku dema $\boldsymbol{x}$ ber bi 2 ve diçe, wê demê $\boldsymbol{f(x)}$ ber bi 8 ve diçe.

Eger $\boldsymbol{A}$ binkomika $\mathbb{R}$ be û $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be,
em dibêjin $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ ber bi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ ve bi dawî dibe dema ku $\boldsymbol{x}$ ber bi $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{A}$ ve biçe, sembola wê jî bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x) = b}$$

yan jî $\boldsymbol{f(x) \to b}$ dema ku $\boldsymbol{x \to x_0}$

Eger $\boldsymbol{\varepsilon}$ hejmareke rast tam pozîtîf be, em dikarin hejmareke din tam pozîtîf bibînin ku $\boldsymbol{\delta = \delta(\varepsilon)}$ û li gorî wê:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \qquad (x \in A)$$

Taybetiyên dawiyan

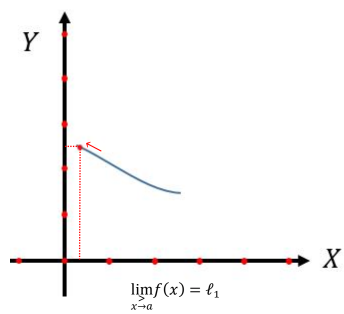
Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ û $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ be, wê demê;

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a + b$
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a - b$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a.b$
4) $\lim\limits_{x \to x_0} [k.g(x)] = k. \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = k.b$
5) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{1}{b}$ $\quad (g(x) \neq 0\,, b \neq o)$
6) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$ $\quad (g(x) \neq 0\,, b \neq o)$
7) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = a^n$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$
8) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt{a}$ $\quad (a \neq , f(x) \neq 0)$

Dawiyên çep û rastê

Dawiya rastê ya $f(x)$, dema ku x nêzîkî a dibe ji aliyê rastê ve (ango bi nirxên mezintir), sembola wê $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, yan jî bi vî awayî ye $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = \ell_1$

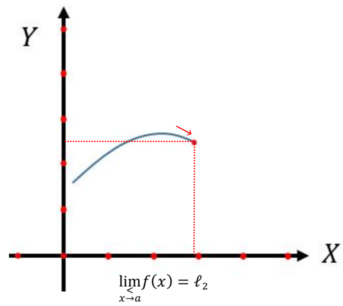
Em ji ℓ_1 re dibêjin: dawiya f ji aliyê rastê ve.



Dawiya çepê ya $f(x)$, dema ku x nêzîkî a dibe ji aliyê çepê ve (ango bi nirxên biçûktir), sembola wê $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, yan jî bi vî awayî ye

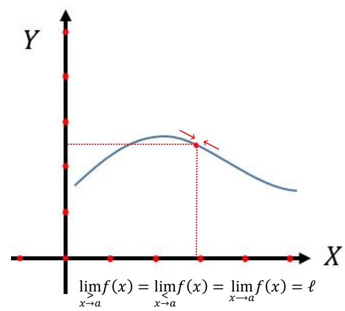
$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = \ell_2$$

Em ji ℓ_2 re dibêjin: dawiya f ji aliyê çepê ve.



Eger $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to a}} f(x)$ wê demê dawiya f li cem x_0 heye, ango:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell$$



Lê eger $\ell_1 \neq \ell_2$ wê demê dawiya f li cem x_0 nîne.

Dawiyên li rex bêdawiyê

- Eger f fonksiyonek di cîranê $+\infty$ de be, dema ku x ber bi $+\infty$ biçe; f ber bi ℓ ve diçe, wê demê em dibêjin dawiya f li rex $+\infty$ yeksanî ℓ ye. sembola wê ev e: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- Eger f fonksiyonek be di cîranê $-\infty$ de, dema ku x ber bi $-\infty$ biçe; f ber bi ℓ ve diçe, wê demê em dibêjin dawiya f li cem $-\infty$ yeksanî ℓ ye. sembola wê ev e: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$
- Eger n hejmarek rast tam pozîtîf be û $k \neq 0$ wê demê:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

Mînak 1:

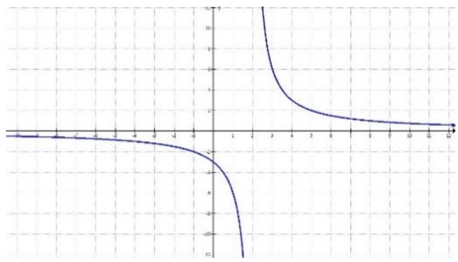
Eger $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}-2$ de fonksiyonek be, li gorî ku; $\boldsymbol{f(x)=\frac{6}{x-2}}$ ye.

a) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ ji aliyê rastê ve li rex $\boldsymbol{x=2}$ bibîne.
b) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ ji aliyê çepê ve li rex $\boldsymbol{x=2}$ bibîne.
c) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ li rex $-\infty$ û $+\infty$ bibîne.

Çareserî:

a) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}}\left(\frac{6}{x-2}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}}\left(\frac{6}{x-2}\right)=-\infty$



c) $f(x)=\left(\frac{6}{x-2}\right)=\frac{6}{x(1-\frac{2}{x})}=\frac{1}{x}\left(\frac{6}{1-\frac{2}{x}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\left(\frac{6}{1-0}\right)=0(6)=0$$

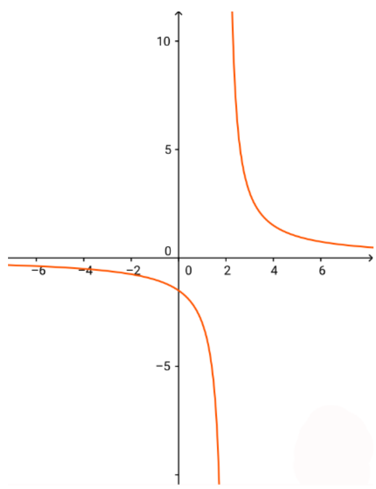
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\left(\frac{6}{1-0}\right)=0(6)=0$$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}+1}}$ di $]0,+\infty[$ de fonksiyonek be, dawiya wê li rex $+\infty$ bibîne.

Çareserî:

$$f(x)=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+\mathbf{1}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$



Em dibînin ku:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Teoriya dorpêçkirinê

Teorî 1:

Eger $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ di $\boldsymbol{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ de du fonksiyon bin; $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ û her du dawiyên $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ û $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ hebin, wê demê: $L \leq M$

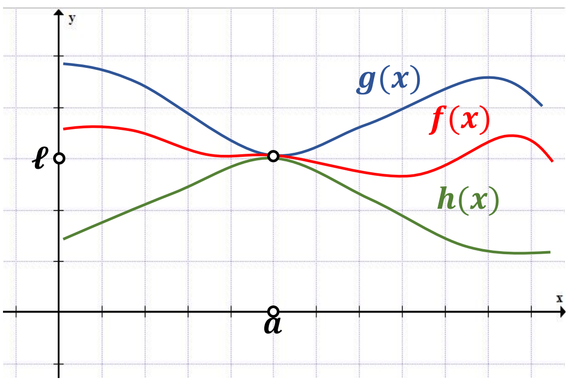
Teorî 2:

Eger $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ di $\boldsymbol{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ de sê fonksiyon bin; $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, û dawiyên $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ hebin, wê demê:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Ji teoriya duyem re, **teoriya dorpêçkirinê** tê gotin.

awayê li jêr teoriya dorpêçkirinê nîşan dide.



Teorî 3:

Eger $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ di $\boldsymbol{D} \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ de du fonksiyon bin.

a) Eger $g(x) \leq f(x)$ û $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ be, wê demê:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

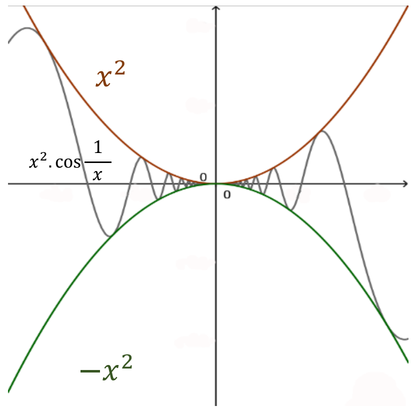
b) Eger $g(x) \geq f(x)$ û $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ be, wê demê:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x^2.\cos\frac{1}{x}}$ di $\mathbb{R}^*$ de fonksiyonek be, $\lim\limits_{x\to 0} x^2.\cos\frac{1}{x}$ bibîne.

Çareserî:



Em dizanin ku di $\mathbb{R}^*$ de
$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le +1$ li gorî vê:

$-x^2 \le x^2.\cos\frac{1}{x} \le x^2$

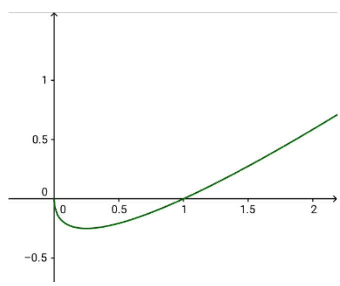
Û ji ber ku $\lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$
û $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0$

Li gorî teoriya dorpêçkirinê
$\lim\limits_{x\to 0} x^2.\cos\frac{1}{x} = 0$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x - \sqrt{x}}$ di $[0, +\infty[$ de fonksiyonek be, dawiya wê li rex $+\infty$ bibîne.

Çareserî:

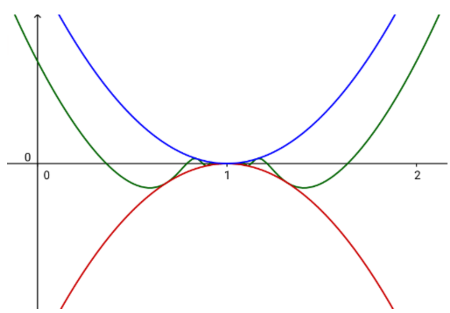


Em dibînin ku $f(x) \ge \sqrt{x} - 1$ û ji ber ku $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - 1\right) = +\infty$

Li gorî vê, tê dîtin ku $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Mînak 3:

Dawiya fonksiyona
$\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2.\cos\frac{1}{x-1}}$ li rex 1
bibîne.



Çareserî:

Eger $\boldsymbol{x \neq 1}$ li gorî vê
$-1 \le \cos\frac{1}{(x-1)} \le +1$
û ji ber ku $(x-1)^2 \ge 0$

Em dibînin ku:

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2.\cos\frac{1}{(x-1)} \leq (x-1)^2$$

Ji ber ku $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ û li gorî teoriya dorpêçkirinê, tê dîtin ku: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2.\cos\frac{1}{(x-1)} = 0$

Hînkirin:

1) Dawiyên fonksiyonên li jêr li rex $\boldsymbol{a}$ bibîne.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+1}{3-x}}$ $\quad a = -1$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+4}$ $\quad a = 1$

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-5}$ $\quad a = 4\ ,5\ ,+\infty$

d) $f(x) = \begin{cases} x-7 & x \neq +1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$

e) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2-1}$ $\quad a = 1\ ,-1, -\infty$

c) $f(x) = \frac{3x+4}{2x-6}$ $\quad a = 3\ ,-\infty\ ,+\infty$

2) Li gorî teoriya dorpêçkirinê, dawiyên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$ $\quad a = +\infty$

b) $f(x) = \frac{\cos x}{x^3} + 5$ $\quad a = -\infty$

c) $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x^2}$ $\quad a = 0$

d) $f(x) = x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad a = 0$

d) $f(x) = x + \sin x$ $\quad a = +\infty$

e) $f(x) = 1 + \frac{\cos x}{x^2}$ $\quad a = +\infty$

3) Dawiyên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ $\quad a = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-5 & x \geq 3 \\ \sqrt{x+13} & x < 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases})$ $\quad a = 0$

REWŞÊN NEDIYAR

Eger $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ di cîranê hejmara rast $\boldsymbol{a}$ de du fonksiyon bin wê demê:

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>$L \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$L \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$L \in \mathbb{R}$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$M \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$+\infty$</td><td colspan="2">$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x))$</td><td>$L+M$</td><td colspan="2">$+\infty$</td><td colspan="2">$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))$</td><td rowspan="2">$L.M$</td><td>$L > 0$</td><td>$L < 0$</td><td>$L > 0$</td><td>$L < 0$</td><td rowspan="2">$+\infty$</td><td rowspan="2">$-\infty$</td><td rowspan="2">$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$M > 0$	$M < 0$	$M > 0$	$M < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{M}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$			

Rewşên nediyar ev in:

$+\infty - \infty \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \frac{0}{0} \quad , \quad 0.\infty$

Ji bo rakirina rewşên nediyar, em her yekê bi awayekî cuda bibînin:

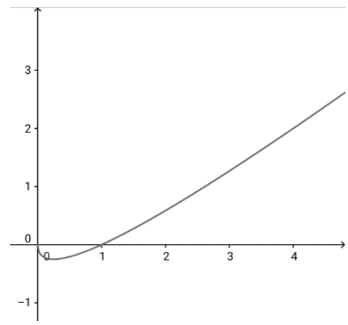
1) Rakirina rewşa nediyar ya bi awayê $+\infty - \infty$

Bi du awayan çêdibe

- **a)** Bi derxistina faktorên hevbeş.
- **b)** Eger kokdam hebe, em hevdan û parvekirina bi hevjimarê re pêk bînin.

Mînak 1:
Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \sqrt{\boldsymbol{x}}$ di $[\mathbf{0}, +\infty[$ de fonksiyonek be, dawiya wê li rex $+\infty$ bibîne.

Çareserî:



Wek em dizanin $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ û $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ ev nediyar e û bi awayê $+\infty-\infty$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=+\infty$$

Bi awayekî din

Dema ku $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1);\ x>0}$ li gorî vê:

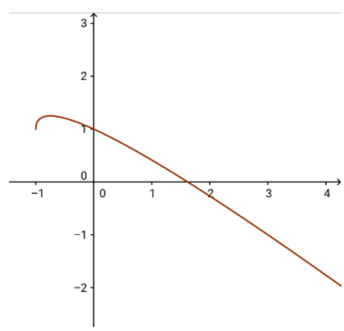
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\boldsymbol{x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$$

Mînak 2:

Dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x+1}-x}$ li rex $+\infty$; $\boldsymbol{D_f=[-1,+\infty[}$ bibîne.

çareserî:



Wek em dizanin ku $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ û $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ ev nediyar e û bi awayê $+\infty-\infty$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar dema ku

$$0<x:\ f(x)=x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$

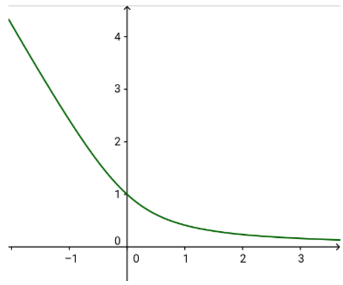
Ji ber ku $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=+\infty$ li gorî vê:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=(+\infty).(-1)=-\infty$$

Mînak 3:

Eger $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x^2+1}-x}$ fonksiyonke be, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ bibîne

çareserî:



fonksiyon li rex $+\infty$ diyar e.

Wek em dizanin $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} = +\infty$ û $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ ev nediyar e û bi awayê $+\infty - \infty$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar:

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} - x\right) = \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} - x\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} + x\right)}{\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} + x\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} + x\right)}$$

Me par û paran hevdanî hevjimarê kir

Li gorî vê: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\boldsymbol{x^2}+1} - x = 0$

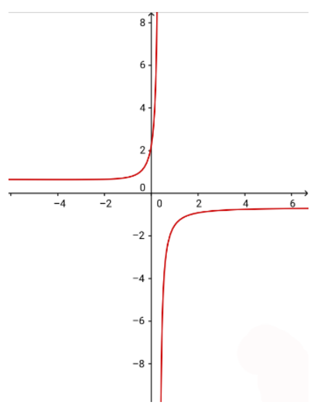
2) Rakirina rewşa nediyar ya bi awayê $\frac{\infty}{\infty}$

Bi derxistina faktorên hevbeş, yan jî em par û paranê hevdanê hevjimara paranê bikin.

Mînak:

Dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{\boldsymbol{1-3x}}$: $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$ wê li rex $+\infty$ bibîne.

çareserî:



fonksiyon li rex $]-\infty, 0[$ diyar e, dema ku $x < 0$ wê demê:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{-x}{1-3x}.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3-\frac{1}{x}}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

Li gorî vê: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

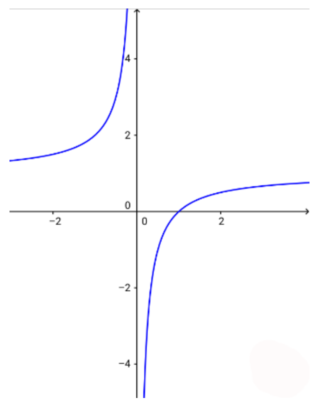
3) Rakirina rewşa nediyar ya bi awayê $\frac{0}{0}$

a) Bi derxistina faktorên hevbeş û sadekirina kertê.
b) Eger par û paran fonksiyonên sêgoşeyî bin, em ê guhertinên pêwîst pêk bînin.

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-\boldsymbol{2x}}$; $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ be:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ bibîne.



çareserî:

Wek em dizanin $\lim\limits_{x\to+2}(x^2-3x+2) = 0$ û $\lim\limits_{x\to+2} x^2-2x = 0$ ev nediyar e û bi awayê $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ e, ji bo rakirina vê rewşa nediyar;

em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin;

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-\boldsymbol{2x}} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)}$$
$$= \frac{(x-1)}{x}$$

Li gorî vê; $\lim\limits_{x\to+2} f(x) = \frac{1}{2}$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ be:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ bibîne

çareserî:

ev rewşeke nediyar e, bi awayê $\frac{0}{0}$ e

Eger $x \in]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$: em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin;

$$f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\mathbf{2}\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

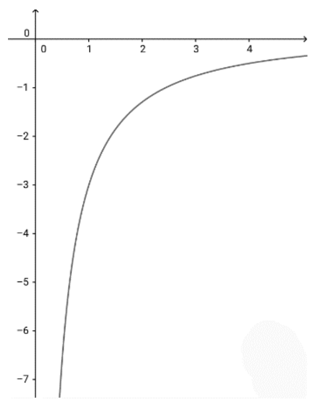
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

4) Rakirina rewşa nediyar ya bi awayê $0.\infty$

Bi derxistina faktorê hevbeş û sadekirinê.

Mînak:

Dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}.(\sqrt{x} - 4)}$ bibîne.



çareserî:

ev rewşeke nediyar e, bi awayê $0.\infty$ ye.

Eger $\boldsymbol{x > 0}$;

$$f(x) = \frac{\boldsymbol{\sqrt{x} - 4}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}} - \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}}$$

Wek em dizanin ku $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}} = 0$ û $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}} = 0$ li gorî vê;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Dawiyên fonksiyonên logarîtima û bihêz

Teorî:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \; ; \; n \geq 0$

4) , $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0 \; ; \; n \geq 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \ln x = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

5) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} x.\ln x = 0$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

Mînak 1:

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin x}$ bibîne.

çareserî:

Em dibînin ku $\lim_{x\to +0}(e^{7x}-1)=0$ û $\lim_{x\to 0}(\sin x)=0$ ev nediyar e û bi awayê $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ e, ji bo rakirina vê rewşa nediyar;

em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin;

$f(x)=\frac{e^{7x}-1}{\sin x}=\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times 7\times\frac{x}{\sin x}\right)$ li gorî vê;

$\lim_{x\to 0}f(x)=1\,.7.\,1=7$

Mînak 2:

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}-1}{x}$ bibîne.

çareserî:

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}-1}{x}$ ev nediyar e û bi awayê $\frac{\infty}{\infty}$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar, em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin; $f(x)=\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty-0=+\infty \qquad \left(\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty\right)$

Hînkirin:

1) Dawiyên fonksiyonên li jêr bibîne:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2}}$ li rex $+\infty$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$ li rex $-\infty$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ li rex $-\infty$

2) Dawiyên li jêr bibîne:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^3}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2x+1}{4x^2+7x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{e^x-1}$ **h)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x)$ **i)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

3) Dawiyên li jêr bibîne:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x \ln x$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln 2x$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x}{\ln x + x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1) + \ln(\frac{1}{x})$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) - \ln(2x+4)$

DOMDARÎ

Domdarî dema ku $x = a$ be

Eger $\boldsymbol{f}$ di navbera vekirî $\boldsymbol{I}$ de fonksiyonek be, û $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$ be wê demê: $\boldsymbol{f}$ domdar e li rex $\boldsymbol{a}$ bi mercê $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Mînak:

Eger $\begin{cases} f(x) = x + 2 & : x \neq 4 \\ f(x) = k & : x = 4 \end{cases}$ fonksiyonek be.

Nirxê $\boldsymbol{k}$ bibîne ta ku fonksiyon domdar be li rex $\boldsymbol{x = 4}$

çareserî:

Em dizanin ku $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 6$ li gorî vê, divê $f(4) = 6$ ango $k = 6$

Mînak:

Eger $f\colon \begin{cases} ax & : x \geq 3 \\ 4x + b & : |x| < 3 \\ x^2 + x & : x \leq -3 \end{cases}$

Nirxên $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ bibîne ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de domdar be.

çareserî:

Em dizanin ku $x \to ax$ di navbera $]3, +\infty[$ de domdar e, fonksiyona $x \to 4x + \mathrm{b}$ di navbera $]-3, +3[$ de domdar e, û fonksiyona $x \to x^2 + x$ di navbera $]-\infty, -3[$ de domdar e, li gorî vê; mercê domdariya f di $\mathbb{R}$ de, domdariya wê li rex -3 û 3 ye ango $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$, $\lim\limits_{x \to +3} f(x) = f(3)$

Dema ku $x = -3$ be

$f(x) = x^2 + x = (-3)^2 + (-3) = 6$

Û $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(4x + \mathrm{b}) = -12 + b$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to -3}} f(x^2 + x) = 6$

Li gorî vê, domdariya f li rex $x = -3$ diyar dike ku;

$-12 + b = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{b = 18}$

Dema ku $x = +3$ be

$f(x) = x^2 + x = (3)^2 + 3 = 12$

Û $\lim\limits_{\substack{x \to +3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to +3 \\ >}} f(ax) = 3a$

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(4x + \mathrm{b}) = 12 + b = 30$

Li gorî vê, domdariya f li rex $x = +3$ ye lê bi mercê:

$3a = 30 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 10}$

Bîranîn:

1) Eger $\boldsymbol{f}$ li rex $\boldsymbol{b}$ domdar be û $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{b}$ wê demê:

   $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$
2) Eger $\boldsymbol{g}$ li rex $\boldsymbol{a}$ domdar be û $\boldsymbol{f}$ li rex $\boldsymbol{g(a)}$ domdar be wê demê: $\boldsymbol{f \circ g}$ li rex $\boldsymbol{a}$ domdar e.
3) Her du fonksiyonên $\mathbf{sin}$ û $\mathbf{cos}$ di $\mathbb{R}$ de domdar in.

Mînak:

Tekez bike ku $\lim\limits_{x \to \pi} \left(\sin\left(\frac{x^2}{\pi + x}\right)\right) = 1$

çareserî:

Eger g: $g(x) = \frac{x^2}{\pi + x}$ li gorî vê; $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = \lim\limits_{x \to \pi} \left(\frac{x^2}{\pi + x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Ji ber ku $\sin$ di $\mathbb{R}$ de, domdar li gorî vê:

$\lim\limits_{x \to \pi} [\sin(g(x))] = \sin\left(\lim\limits_{x \to \pi} g(x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$

Hînkirin:

1) Eger $f(x)=\begin{cases} x & : x<-1 \\ cx+d & : -1\leq x\leq 2 \\ 2x-7 & : x>2 \end{cases}$

Nirxên $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ bibîne ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de.domdar be

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2+1}{x^2+3}\right)\right)$ bibîne.

3) Eger $\begin{cases} cx+1 & : x\leq 3 \\ cx^2-1 & : x>3 \end{cases}$ fonksiyonek be.

Nirxê $\boldsymbol{c}$ bibîne ta ku fonksiyon di $\mathbb{R}$ de domdar be.

4) Eger $f(x)=\begin{cases} |x|+\frac{\sin^3 Ax}{x^3} & : x<0 \\ 8 & : x=0 \\ \sqrt{x}+B & : x>0 \end{cases}$

Nirxên $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ bibîne ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de domdar be.

5) Eger $f(x)=\begin{cases} A+\frac{3|x-1|}{x^2+x-2} & : x>1 \\ B & : x=1 \\ 2x-1 & : x<1 \end{cases}$

Ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de domdar be, nirxên $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ bibîne.

PIRSÊN BEŞA YEKEM

1) Dawiyên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$ li rex $+\infty$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+5} - x^2$ li rex $+\infty$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$ li rex $+\infty$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{7x+1}-6}{x^2-25}$ li rex 5

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$ li rex -2

f) $f(x) = \frac{x^2+x-20}{2x^2+10x}$ li rex -5

2) Li gorî teoriya dorpêçkirinê, dawiyên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = 8 + \sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad a = 0$

b) $f(x) = 6 + \frac{x.\cos x^2}{x^2+1}$ $\quad a = +\infty$

c) $f(x) = |x-5|\cos^2\left(\frac{1}{x-5}\right)$ $\quad a = 5$

d) $f(x) = 3x + 9 + 6\sin(2x)$ $\quad a = +\infty$

3) Dawiyên li jêr eger hebin, bibîne.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+8}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x})$

f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|})$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

i) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

j) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$

4) Dawiyên li jêr bibîne.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(2x) + \frac{1}{\ln(x)}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x-\ln x}{2+\ln x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) - x$

5) Dawiyên li jêr bibîne.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+x^4}}$ **d)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+4}$

6) Dawiyên li jêr eger hebin, bibîne.

a) $\lim_{x\to 2}(x-2)^2.\cot(x-2)$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)-x}{x+2\sin x}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$ **d)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^3-1}-1}{x-1}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-5}$ **f)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{3-x}}$ **h)** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2+\cos\frac{1}{x}}$ **j)** $\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}$

7) Dawiyên li jêr eger hebin, bibîne.

a) $\lim_{x\to 2}(x^3-8)$ **b)** $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x\to 9} \frac{3+x}{9-x}$ **d)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{2-x}{\sqrt{7+6x^2}}$

e) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}}{1+2x-x^2}$ **f)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{6-x^3}{7x^3+3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{4x}}{x}$ **h)** $\lim_{x\to +\infty} (2x-e^x)$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-\ln(x)}$ **j)** $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}-\ln(x)\right)$

8) Dawiyên fonksiyonên li jêr li rex $\boldsymbol{a}$ eger hebin, bibîne.

a) $f(x)=\frac{|x+3|}{x+3}$ $a=-3$

b) $f(x)=\sqrt{2x-1-x^2}$ $a=1$

c) $f(x)=\begin{cases} 1-x & : \ x<0 \\ x^2-2x+1 & : x>0 \end{cases}$ $a=0$

d) $f(x)=\begin{cases} 1 & : \ x\le 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & : \ x>1 \end{cases}$ $a=1$

9) Dawiyên li jêr bibîne.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x\cos x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{3x}{\tan x}\cos x$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$, $\lim_{x \to 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$

10) Eger $f(x) = \begin{cases} A.\left(\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x^2+3x-4}\right) & : x > 1 \\ -\frac{1}{10} & : x = 1 \\ \frac{B.\sin(x-1)}{(x^2+1).|x-1|} & : x < 1 \end{cases}$

Nirxên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ bibîne ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de domdar be.

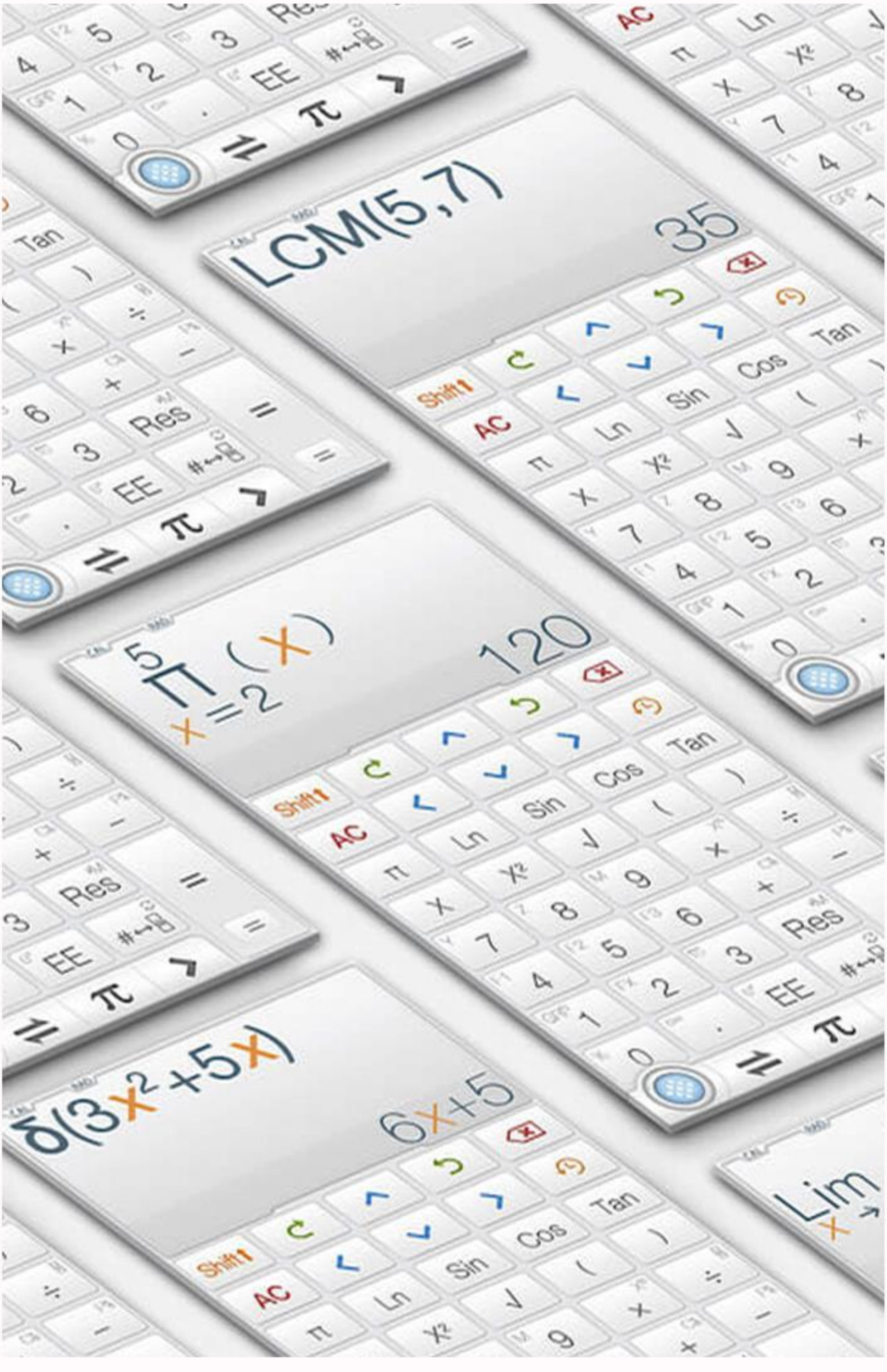
11) Eger $f(x) = \begin{cases} Ax^2 + B & : x < -1 \\ -x + 2B & : 0 \geq x \geq -1 \\ A.\frac{\sin 2x}{x} + B & : x > 0 \end{cases}$

Nirxên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ bibîne ta ku $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de.domdar be

BEŞA DUYEM

DARAŞTIN

1) Daraştin
2) Fonksiyona daraştî ya du fonksiyonên hevgirtî
3) Bikaranîna daraştinê di dîtina guherîna fonksiyona hejmarî de
4) Nirxên xwecih yên mezin û biçûk
5) Pêkanînên nirxên mezin û biçûk


LCM(5,7)
35
120
6X+5

DARAŞTIN

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}$ de fonksyonek be û $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$, û fonksyona $\boldsymbol{g}$ bi vî awayî were dayîn; $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ li gorî ku $\boldsymbol{I}\backslash\{\boldsymbol{x_0}\}$ e.

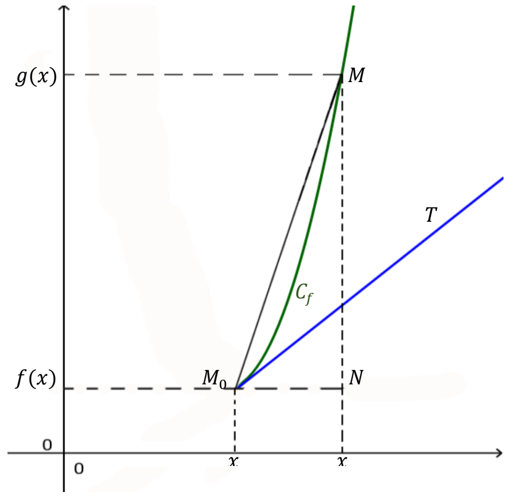
Em ji $\boldsymbol{f}$ re dibêjin di $\boldsymbol{x_0}$ de **daraştî** ye, tenê eger:

$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m(x_0) \in \mathbb{R}$

Wê demê ji $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to x_0}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ re **hejmara daraştî** ya $\boldsymbol{f}$ tê gotin, sembola wê jî $\boldsymbol{f'(x_0)}$

Daraştina $\boldsymbol{f}$ li rex $\boldsymbol{x_0}$; meyla pêveka girafîka $\boldsymbol{C_f}$ di xala $\boldsymbol{M_0(x_0, f(x_0))}$ de ye.

Meyla pêvek;
(D)=$\frac{\boldsymbol{f(x)-f(x_0)}}{\boldsymbol{x-x_0}} = \frac{\overline{\boldsymbol{NM}}}{\boldsymbol{M_0N}}$



Eger $\boldsymbol{f(x)}$ di navbera $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}$ de fonksiyoneke daraştî be**,** wê demê daraştina yekem ya fonksiyona $y = \boldsymbol{f(x)}$ bi vî awayî tê nivîsandin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad : \quad \Delta x \neq 0$$

Û bi yek ji van sembolan tê nîşankirin:

$$\frac{dy}{dx} \quad , \quad \frac{df}{dx} \quad , \quad f'(x) \quad , \quad y'$$

Eger fonksiyona $x \longmapsto f(x)$ li rex x_0 daraştî be, wê demê meyla pêveka fonksyona $y = f(x)$ di xala $M_0(x_0, y_0)$ de ev e;

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Hevkêşeya rasteka ku meyla wê m be û di xala $m_0(x_0, y_0)$ re derbas dibe, bi vî awayî ye; $y - y_0 = m(x - x_0)$

Mînak:

Fonksiyona $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de li gorî $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ de tê daraştin, an na?

Çareserî:

Em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ di $\mathbb{R}^*$ de binivîsin;

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = +\infty$$

Li gorî vê; $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ de ne daraştî ye.

Ji bo dîtina daraştina yekem:

1) Em qasiya guherîna fonksiyona $f(x)$ ber bi $f(x + \Delta x)$ ve, bibînin.
2) Em $f(x + \Delta x) - f(x)$ bibînin.
3) Em navîna guherîna $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bibînin.
4) Di dawî de, em daraştinê bi rêya dawiyê bibînin: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Mînak1:

Daraştina yekem ya $f(x) = 2x + 5$ bibîne.

Çareserî:

1) Em qasiya guherîna fonksiyona $f(x)$ ber bi $f(x + \Delta x)$ ve, bibînin.
   $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) + 5$
2) Em $f(x + \Delta x) - f(x)$ bibînin.
   $$f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) + 5 - (2x + 5)$$
   $$= 2x + 2\Delta x + 5 - 2x - 5 = 2\Delta x$$
3) Em navîna guherîna $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bibînin.
   $$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$
4) Di dawî de, em daraştinê bi rêya dawiyê bibînin:
   $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2 = 2$$

Mînak2:

Daraştina yekem ya $f(x) = \sqrt{3x-7}$ bibîne.

Çareserî:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} - \sqrt{3x-7}}{\Delta x} \frac{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x+3\Delta x-7-3x+7}{\Delta x(\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x(\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3}{(\sqrt{3(x+\Delta x)-7} + \sqrt{3x-7})} = \frac{3}{(\sqrt{3x-7}) + \sqrt{3x-7})} = \frac{3}{2(\sqrt{3x-7})}$$

Mînak3:

Eger C girafîka fonksiyona f be; $f(x) = \sqrt{x-3}$ di navbera $]0, +\infty[$ de be.

1) Daraştina fonksiyonê bibîne.
2) Hevkêşeya pêveka C di xala $M(1, y)$ de bibîne.
3) Hevkêşeya rasteka tîk ya li ser pêvekê bibîne.

Çareserî:

1) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-3} - \sqrt{x-3}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-3} - \sqrt{x-3}}{\Delta x} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-3} + \sqrt{3x-3}}{\sqrt{(x+\Delta x)-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-3-x+3}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)-3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)-3} + \sqrt{x-3}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)-3} + \sqrt{x-3}} = \frac{1}{(\sqrt{x-3}) + \sqrt{x-3})} = \frac{1}{2(\sqrt{x-3})}$$

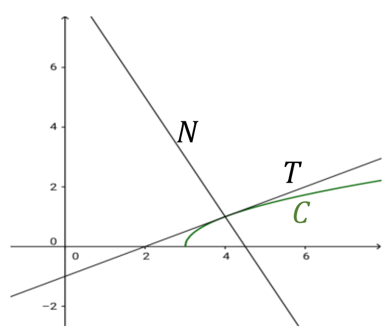
$f(4) = 1 \implies$ xala pêvek $M(4, 1)$ e.

2) $m_T = f^{'}(4) = \frac{1}{2(\sqrt{4-3})} = \frac{1}{2}$

Hevkêşeya pêvekê ev e:

$y = f^{'}(a)(x-a) + f(a)$

$y = f^{'}(4)(x-4) + f(4)$



$$y = \frac{1}{2}(x-4)+1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

Em dizanin ku $m_T.m_N = -1$ ji bo dîtina hevkêşeya rasteka tîk ya li ser pêvekê:

$m_N = -2$

$y = -2(x-4) + f(4)$

$y = -2(x-4) + 1 \Rightarrow y = -2x + 9$

Rêgezên daraştina hin fonksiyonan

Fonkisyon	daraştin	Navber
$f(x) = k$	$\boldsymbol{f'(x) = 0}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$\boldsymbol{f'(x) = a}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$x \in [0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$\boldsymbol{f'(x) = \cos x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\boldsymbol{f'(x) = -\sin x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x}}$	$x \in [0, +\infty[$

Mînak:

fonkisyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$\boldsymbol{f(x) = 2x + 5}$	$f'(x) = 2$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = 3x^6}$	$f'(x) = 3.(6)x^{6-1} = 18x^5$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = x^{\frac{5}{2}}}$	$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ $\boldsymbol{= 5x^{\frac{1}{3}}}$	$f'(x) = \frac{1}{3}\times 5x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ $= \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = x.\sqrt{x^7}}$ $\boldsymbol{= x.x^{\frac{7}{2}} = x^{\frac{9}{2}}}$	$f'(x) = \frac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-1} = \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^5} = x^{-3}}$	$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$	$\mathbb{R}$

Teoriyên daraştinê

Fonksiyon	Rêgeza daraştinê	Navbera daraştinê
$f(x) = u + v$	$\boldsymbol{f'(x) = u' + v'}$	$\boldsymbol{I}$
$f(x) = u.v$	$\boldsymbol{f'(x) = u'v + v'u}$	$\boldsymbol{I}$
$f(x) = au$	$\boldsymbol{f'(x) = au'}$	$\boldsymbol{I}$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$\boldsymbol{f'(x) = -\frac{u'}{u^2}}$	$\boldsymbol{I_1 \subseteq I/\{x: u(x) = 0\}}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = -\boldsymbol{\frac{u'v - v'u}{v^2}}$	$\boldsymbol{I_1 \subseteq I/\{x: v(x) = 0\}}$

Taybetmendî

1) Fonksiyonên pir pêkhate, di $\mathbb{R}$ de daraştî ne.
2) Fonksiyona kert ya bi awayê $\frac{f(x)}{g(x)}$ di her navbera vekirî ya di komika pênasên wê de daraştî ye.

Mînak 1:

Daraştina yekem ya fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
c) $f(x) = x^{-4} - 2x^3 + \sqrt[5]{x^4}$

Çareserî:

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$
$f'(x) = 2(3)x - 3 = 6x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
Em dizanin ku $\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{(u)'}{u^2}$ li gorî ku $u = \sqrt{x^2+1}$ e.
Lê $u' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^2.\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

c) $f(x) = x^{-4} - 2x^3 + \sqrt[5]{x^4}$

$$f'(x) = -4x^{-4-1} - 2(3)x^{3-1} + \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}$$

$$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^2 + \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{x^5} - 6x^2 + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

Mînak 2:

fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$\boldsymbol{f(x) = x\ln x - x}$	$f'(x) = 1.\ln x + \frac{1}{x}.x - 1$ $= \ln x + 1 - 1 = \ln x$	$[0, +\infty[$
$f(x) = x\sqrt{x} + 6$	$f'(x) = 1.\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.x$ $= \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$
$f(x) = (3x - 4).e^x$	$f'(x) = (3x-4)'e^x + (e^x)'(3x-4)$ $= 3e^x + e^x(3x-4)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{5}{3x - 1}$	$f'(x) = -\frac{15}{3x - 1}$	$\mathbb{R}/\{\frac{1}{3}\}$
$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$	$f'(x) = \frac{(x+1)'(x^2+3)-(x^2+3)'(x+1)}{(x^2+3)^2}$ $= \frac{(1)(x^2+3)-(2x)(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = (2x+3)\sqrt{x^5}$	$f'(x) = 2\sqrt{x^5} + \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}.(2x+3)$	$[0, +\infty[$
$f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln x}$	$f'(x) = \frac{(e^x-1)'(\ln x) - (\ln x)'(e^x - 1)}{(\ln x)^2}$ $= \frac{e^x(\ln x) - \frac{1}{x}(e^x - 1)}{(\ln x)^2}$	$]0, +\infty]$

Hînkirin:

1) Daraştinên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = 7x^3 + 5$

b) $f(x) = x\sin(x)$

c) $f(x) = \frac{3x+2}{5x-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

f) $f(x) = \frac{2x-3}{4x+1}$

g) $f(x) = (\sin x + \cos x)\sin x$

h) $f(x) = 2x\sqrt{x}$

i) $f(x) = \frac{2+\cos x}{3-\cos x}$

j) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - x$

2) Hevkêşeya pêveka C di xala $M(a,b)$ de bibîne.

a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - x \quad a = 0$

b) $f(x) = \cos x \quad a = 0$

3) Fonksiyonên li jêr li rex a, tê daraştin an na?

a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 0$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad a = 1$

c) $f(x) = x\sqrt{x}, \quad a = 0$

d) $f(x) = \cos\sqrt{x} \quad a = 0$

FONKSIYONA DARAŞTÎ YA DU FONKSIYONÊN HEVGIRTÎ

Daraştina fonksiyoneke hevgirtî

Eger $\boldsymbol{g}$ di navbera J de fonksiyoneke daraştî be, $\boldsymbol{h}$ di navbereke binkomika $\mathrm{g}(I)$ de fonksiyoneke daraştî be, wê demê:

Fonksiyona $h \circ g$ li gorî ku $(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big)$ di navbera I de daraştî ye.

Û zagona daraştina wê ev e: $(h \circ g)'(x) = h'\big(g(x)\big)g'(x)$

Mînak:

Eger $f(x) = (5x^2 - x)^7$ be, daraştina $f(x)$ bibîne.

Çareserî:

Eger $g(x) = 5x^2 - x$ û $h(x) = x^7$ be, li gorî vê $f = h \circ g(x)$

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'\big(g(x)\big).g'(x) = 7.\big(g(x)\big)^6.(10x - 1)$$

$$f'(x) = 7.(5x^2 - x)^6.(10x - 1)$$

Daraştina hêza fonksiyonê

Eger g di navbera vekirî de fonksiyoneke daraştî be $I \subseteq \mathbb{R}$,
û fonksiyona $f(x) = \big(g(x)\big)^r \quad : r \in \mathbb{Q}$ di $I_1 \subseteq I$ de daraştî be

Li gorî vê: $\boldsymbol{f'(x) = r\big(g(x)\big)^{r-1}.g'(x)}$

Mînak:

Fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{\frac{-1}{2}}(x^2 - 4)' = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{\frac{-1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$	$]2, +\infty[$
$f(x) = (6x - 5)^4$	$f'(x) = 4(6x - 5)^3(6x - 5)' = 4(6x - 5)^3(6) = 24(6x - 5)^3$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ln^2(x^2 - 4)$	$f'(x) = 2.\,g(x).\,g'(x) = 2.\ln(x^2 - 4).\frac{2x}{x^2 - 4}$	$]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

Daraştina fonksiyonên sêgoşeyî ya fonksiyonekê

Daraştina fonksiyonên sêgoşeyî yên bingehîn ya fonksiyonekê

Fonkisyon	daraştin
$f(x) = \sin(g(x))$	$f'(x) = g'(x).\cos(g(x))$
$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -g'(x).\sin(g(x))$
$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = g'(x).(1 + \tan^2(g(x))) = \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$
$f(x) = \cot(g(x))$	$f'(x) = -g'(x).(1 + \cot^2(g(x))) = \frac{-g'(x)}{\sin^2(g(x))}$

Mînak 1:

Fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sin(x^2 + 3x)$	$f'(x) = (x^2 + 3x)'.\cos(x^2 + 3x) = (2x + 3).\cos(x^2 + 3x)$	$\mathbb{R}$
$f(\boldsymbol{x}) = \cos(x^3 - 1)$	$f'(x) = (x^3 - 1)'.\sin(x^3 - 1) = (3x).\sin(x^3 - 1)$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \tan(2x - 7)$	$f'(x) = (2x - 7)'.(1 + \tan^2(2x - 7)) = 2.(1 + \tan^2(2x - 7))$	
$f(x) = \cot x$	$f'(x) = \frac{-(x)'}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$	

Daraştina fonksiyona bihêz ya fonksiyonekê

Daraştina fonksiyona bi awayê $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$

Eger $g(x)$ di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de fonksiyoneke daraştî be, û fonksiyona f bi vî awayî be: $f(x) = e^{g(x)}$

Daraştina wê bi vî awayî ye: $\boldsymbol{f'(x) = g'(x).e^{g(x)} = g'(x).f(x)}$

Mînak:

Fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$f(x) = e^{(x^6 - 4x)}$	$f'(x) = (x^6 - 4x)'.e^{(x^6 - 4x)} = (6x^5 - 4).e^{(x^6 - 4x)}$	$]2, +\infty[$
$f(\boldsymbol{x}) = e^{\frac{1-x}{x}}$	$f'(x) = \frac{(-1)x - 1(1 - x)}{x^2}.e^{\frac{1-x}{x}} = \frac{-1}{x^2}.e^{\frac{1-x}{x}}$	$\mathbb{R}/\{0\}$
$f(\boldsymbol{x}) = x^3 e^{-2x}$	$f'(x) = 3x^2 e^{-2x} + (-2e^{-2x}.x^3) = 3x^2 e^{-2x} - 2x^3 e^{-2x}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = -5e^{\sin x}$	$f'(x) = -5\cos x\, e^{\sin x}$	$\mathbb{R}$

Daraştina fonksiyona logarîtima ya fonksiyonekê

Daraştina fonksiyona bi awayê $f(x) = \ln(g(x))$

Eger $g(x)$ di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de fonksiyoneke daraştî be, û fonksiyona f bi vî awayî be: $f(x) = \ln(g(x))$

Eê demê, f di her navbera ku binkomika I de be daraştî ye dema ku $g(x) > 0$ û daraştina wê bi vî awayî ye:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Mînak:

Fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$f(x) = \ln(2x - 9)$	$f'(x) = \dfrac{(2x-9)'}{2x-9} = \dfrac{2}{2x-9}$	$\left]\dfrac{9}{2}, +\infty\right[$
$f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$	$f'(x) = \dfrac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1} = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x^2 - 7)$	$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2x}{x^2-7}$	$]-\infty, -\sqrt{7}[$ $\cup\ ]\sqrt{7}, +\infty[$

Hînkirin:

1) Daraştinên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x})$ **b)** $f(x) = \ln 2x$

c) $f(x) = \ln(3x^2 + 5x + 7)$ **d)** $f(x) = \ln x + x$

e) $f(x) = \ln x + 1$ **f)** $f(x) = \ln(3x - 3x^2)$

g) $f(x) = x^2 \ln x + x$ **h)** $f(x) = \ln x\, e^x$

i) $f(x) = \ln(3x - 1)^5$ **j)** $\mathrm{f}(x) = [\ln(3x - 1)]^2$

k) $f(x) = \ln \sqrt{x}$ **l)** $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$

2) Di navberên diyarkirî de daraştinên fonksiyonên li jêr, bibîne.

a) $f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x) + 2}$ $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{3\cos^2 x + 4}$ $x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \sin\left(\sqrt{2 + x^2}\right)$ $x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \tan(3x)$ $x \in]0, \frac{\pi}{6}[$

e) $f(x) = \sin(2x^2 + x - 4)$ $x \in \mathbb{R}$

3) Daraştinên fonksiyonên li jêr ,bibîne.

a) $f(x) = \sqrt{x.e^x + x}$

b) $f(x) = e^{\sqrt[3]{x^2+1}}$

c) $f(x) = \sin\left(\sqrt{2 + x^2}\right)$

d) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{2x}}$

e) $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$

BIKARANÎNA DARAŞTINÊ DI DÎTINA GUHERÎNA FONKSIYONA HEJMARÎ DE

Guherîna fonksiyona hejmarî

Eger f di navberekê de fonksiyoneke daraştî be:

a) Divê ku $f'(x) \geq 0$ be, ta ku f tam zêdeker be di heman navberê de, bêyî ku yeksanî sifir be.
b) Divê ku $f'(x) \leq 0$ be, ta ku f tam kêmker be di heman navberê de, bêyî ku yeksanî sifir be.

Mînak 1:

Guherîna fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Çareserî:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Eger $f'(x) = 0$ wê demê $3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1) = 0$

Li gorî vê: $x = 1$, $x = -1$

Em hêmaya $f'(x)$ di van xalan de bibînin.

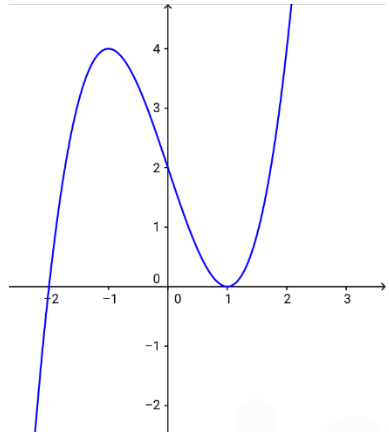
x	-∞		-1		$+1$		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		+	0	-	0	+	
Guherîna $f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	0	$\nearrow$	

f zêdeker e di $]-\infty, -1[$ de.

f kêmker e di $]-1, +1[$ de.

f zêdeker e di $]+1, +\infty[$ de.

Em girafîka f xêz bikin.



Di girafîkê de xwiya ye guherîna f li gorî tabloyê ye. Nirxên x yên di navberên kêmker û zêdekera fonksiyonê de; heman nirxên ku li wir f' sifir e.

Mînak 2:

Guherîna fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = x + 2\sin x \qquad : \quad 0 < x < 2\pi$

Çareserî:

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

Eger $f'(x) = 0$ wê demê $\cos x = -\frac{1}{2}$

Li gorî vê: $x = \frac{2\pi}{3}$, $\quad x = \frac{4\pi}{3}$

Em hêmaya $f'(x)$ di van xalan de bibînin.

x	-∞		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		+	0	-	0	+	
Guherîna $f(x)$		↗		↘		↗	

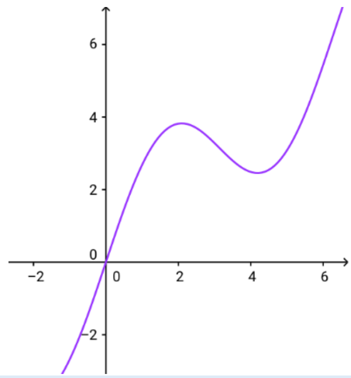
f zêdeker e di $]-\infty, \frac{2\pi}{3}[$ de.

f kêmker e di $]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}[$ de.

f zêdeker e di $]\frac{2\pi}{3}, +\infty[$ de.

Em girafîka f xêz bikin.

Di girafîkê de xwiya ye guherîna f li gorî tabloyê ye. Nirxên x yên di navberên kêmker û zêdekera fonksiyonê de; heman nirxên ku li wir f' sifir e.



Tekezkirina newekheviyan

Ji bo tekezkirina newekheviyeke bi nenasekê, em ê pêkhateyan bi giştî bibin aliyekî ta bibe bi awayê $f(x) \geq 0$ yan jî $f(x) > 0$: f fonksiyona ku newekhevî wê diyar dike, biştire em ê guherîna fonksiyona f bibînin.

Mînak:

Tekez bike ku;

a) $\ln x < x$; $x \in]0, +\infty[$

b) Piştre; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$

Çareserî:

a) $\ln x < x \Longrightarrow x - \ln x > 0$

Em dibînin ku newekhevî bi vî awayî ye $f(x) > 0$

Fonksiyona $f(x) = x - ln\, x$ domdar e û di navbera $]0, +\infty[$ de daraştiye, li gorî vê: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Ji ber ku paran di $]0, +\infty[$ de pozîtîf e, em dibînin ku hêmaya $f'(x)$ wek hêmaya $(x - 1)$ e, li gorî vê, tabloya guherînê bi vî awayî çêdibe:

x	0		1		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		-	0	+	
Guherîna $f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Li vir xwiya ye ku $f(x) \geq 1 > 0$ ji bo hemû nirxên $x > 0$

Dema ku $x > 1 \Longrightarrow \ln(x) > 0$
li vir diyar e ku $0 < \ln(x) < x : x \in]0, +\infty[$
dema ku $x > 1$ li gorî vê: $\sqrt{x} > 1$ bi pêkanîna newkheviyê
$0 < \frac{\ln(x)}{x} < 2\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$
ji ber ku $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; li gorî teoriya dorpêçkirinê:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Pêkanînên guherînên fonksiyonan

Mînak 1:

Guherîna fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = x^2 - 4x$

Çareserî:

$f(x)$ di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştî ye.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Tu nêzîkerên girafîka $f(x)$ rastî xx' nînin.

$f'(x) = 2x - 4$
$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$

$f(2) = -4$

Em tabloyê xêz bikin.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Mînak 2:

Eger $f(x) = \frac{5x+1}{x+3}$ fonksiyonek be:

1) Nêzîkerên rastî tewareya XX' bibîne.
2) Guherîna fonksiyonê bibîne.

Çareserî:

1) $f(x)$ di $\mathbb{R}/\{-3\}$ de domdar e û daraştî ye.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{x} = 5 \Longrightarrow y = 5$ nêzîker rastî XX' li rex $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{x} = 5 \Longrightarrow y = 5$ nêzîker rastî XX' li rex $-\infty$

$\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = -3$ nêzîker rastî YY' li rex $-\infty$

$\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow x = -3$ nêzîker rastî YY' li rex $-\infty$

2) $f'(x) = \frac{5(x+3)-1(5x+1)}{(5x+1)^2} = \frac{14}{(5x+1)^2} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$5 \nearrow +\infty$	‖	$5 \nearrow -\infty$

Mînak 3:

Eger $f(x) = e^x + x$ fonksiyonek be:

1) Nêzîkerên rastî tewareya XX' bibîne.
2) Guherîna fonksiyonê bibîne.

Çareserî:

1) $f(x)$ di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştiye.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-\infty} - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) == \lim_{x\to-\infty} e^{+\infty} - (+\infty) = +\infty - \infty$ rewş ne diyar e,

em $f(x)$ bi awayekî din binivîsin;

$f(x) = e^x(1 - \frac{x}{e^x})$ li gorî vê;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$

2) $f(x)$ di $\mathbb{R}$ de daraştî ye.

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow e^x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0$

Li gorî vê $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mînak 4:

Guherîna fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = x \ln x$

Çareserî:

$f(x)$ di $]0, +\infty[$ de domdar e û daraştî ye.

$$\lim_{x \to 0^+} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

$$f'(x) = 1. \ln x + \frac{1}{x}. x = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1$$

$$\Longrightarrow \ln x = -\ln e = \ln \frac{1}{e} \Longrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nirxê mezin û nirxê biçûk yên giştî yên fonksiyonekê

Eger f di D de fonksiyonek be.

a) Dema ku $f(x) \leq f(x_0)$ be, ji $f(x_0)$ re **nirxê mezin yê giştî** yê f tê gotin $(x \in D)$.
b) Dema ku $f(x) \geq f(x_0)$ be, ji $f(x_0)$ re **nirxê biçûk yê giştî** yê f tê gotin $(x \in D)$.

Mînak 1:

Eger $f(x) = \cos(x)$ di $\mathbb{R}$ de fonksiyonek be.

Em di zanin ku di fonksiyonên sêgoşeyî de:

$\cos(\pi) = -1 \leq \cos(x) \leq +1 = \cos(0)$

Li gorî vê: nirxê mezin yê giştî yê fonksiyonê 1 e û nirxê biçûk yê giştî -1 e.

Mînak 2:

Eger $f(x) = x^2 + 2x$ di $\mathbb{R}$ de fonksiyonek be.

Em di zanin ku:

$f(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1 \geq -1 = f(-1)$

Li gorî vê: nirxê mezin yê biçûk yê fonksiyonê -1 e û nirxê mezin yê giştî yê fonksiyonê nîne, ji ber ku $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Mînak3:

Eger $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ di $[-4,4]$ de fonksiyonek be.

Nirxê mezin û yê biçûk yên giştî eger hebin, bibîne.

Çareserî:

- $f(-4) = \sqrt{16 - (-4)^2} = 0$
  $f(4) = \sqrt{16 - (4)^2} = 0$
- $f(x)$ di $]-4,4[$ de daraştiye.
  $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$
- $f'(x) = 0 \Longrightarrow -x = 0 \Longrightarrow x = 0$

- $f(0) = \sqrt{16 - (0)^2} = 4$

x	-4		0		$+4$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

- Li gorî tabloyê:
  $f(4) = 0$ nirxê biçûk yê giştî yê f ye.
  $f(-4) = 0$ nirxê biçûk yê giştî yê f ye.
  $f(0) = 2$ nirxê mezin yê giştî yê f ye.

Têbînî:

Eger f ber bi $+\infty$ ve li rex a biçe, wê demê nirxê mezin yê vê fonksiyonê nîne.

Eger f ber bi $-\infty$ ve li rex a biçe, wê demê nirxê biçûk yê vê fonksiyonê nîne.

Mînak:

Eger $f(x) = x + 2\sin(x)$ di $\mathbb{R}$ de fonksiyonek be.

Nirxê mezin û yê biçûk yên giştî eger hebin, bibîne.

Çareserî:

Em dizanin ku $f(x) \geq x - 2$ li gorî vê:

$\lim_{x \to +\infty} f(x-2) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, nirxê mezin yê giştî yê f nîne.

Li aliyê din $f(x) \leq x + 2$ li gorî vê:

$\lim_{x \to -\infty} f(x+2) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, nirxê biçûk yê giştî yê f nîne.

Hînkirin:

1) Guherîna fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = x^4 - 4\text{x} + 3 \quad : \quad x \in \mathbb{R}$

2) Rastiya newekheviya li jêr, li gorî navbera wê, tekez bike.

$e^x \geq 1 + x \quad : \quad x \in \mathbb{R}$
piştire rastiya dawiyê jî $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ tekez bike.

3) Rastiya newekheviya li jêr, li gorî navbera wê, tekez bike

$\ln(1 + x) \leq x \quad : \quad x \in]-1, +\infty[$

4) Rastiya newekheviyên li jêr, li gorî navbera wan, tekez bike

$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x$ û $\tan x \leq x + \frac{(\tan x)^3}{3} \quad : x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

piştire nirxê $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\tan x - x}{x^3}$ bikaranîna teoriya dorpêçkirinê, bibîne.

5) Nirxê mezin û yê biçûk yên fonksiyonên li jêr eger hebin, bibîne.

a) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2} \quad : \quad x \in]-2, 2]$

b) $f(x) = \sin x + \cos x + 1 \quad : \quad x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = |x - 2| - |x + 1| \quad : \quad x \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = x^3 \quad : \quad x \in]-1, 3]$

NIRXÊN XWECIH YÊN MEZIN Û BIÇÛK

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{D}$ de; fonksiyonek be $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{D}$.

c) Dema ku $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ be $(\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{D})$, ji $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ re **nirxê mezin yê xwecih** ji $\boldsymbol{f}$ re tê gotin $\big(x \in (D \cap D_1)\big)$.

d) Dema ku $f(x) \ge f(x_0)$ be $(x_0 \in D)$, ji $f(x_0)$ re **nirxê biçûk yê xwecih** ji f re tê gotin $\big(x \in (D \cap D_1)\big)$.

Têbînî:

a) Nirxê mezin yan yê biçûk ya giştî dibe nirxê mezin yan yê biçûk ya xwecih, lê berûvajî wê çênabe.

b) Eger fonksiyonek tam zêdeker yan jî tam kêmker be, wê demê jê re nirxê mezin yan jî biçûk yê xwecih jê re nîne.

Mînak 1:

Nirxên mezin an yên biçûk yên xwecih yên fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

Çareserî:

- $f(x)$ di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştiye
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x^3) = -\infty$
- Fonksiyon domdar e û tê daraştin:

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$

Dema ku $f'(x) = 0$ wê demê $x = 3$ yan jî $x = 1$

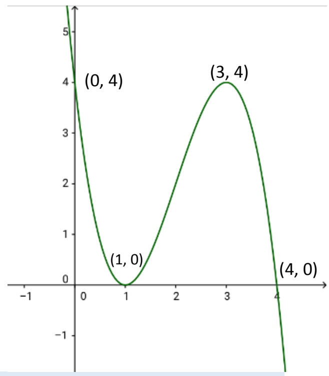
Du xal pêk tên $(f(3)\,,4)$, $(f(1)\,,0)$ ango $(20\,,-3)$, $(-12\,,1)$

Em tabloya guherîna fonksiyonê xêz bikin.

x	-∞		1		3		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		-	0	+	0	-	
Guherîna $f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Em girafîka f xêz bikin.

Di girafîkê de xwiya ye guherîna f li gorî tabloyê ye.



Têbînî

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{D}$ de fonksiyonek daraştî be; $\boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\subset \boldsymbol{D}$

a) Dema ku $\boldsymbol{f'(x)} > \boldsymbol{0}$ be; $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_0}[$, û $\boldsymbol{f'(x)} < \boldsymbol{0}$ be; $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{b}[$ wê demê, $f(x_0)$ nirxê mezin yê xwecih ye ji f re.

b) Dema ku $\boldsymbol{f'(x)} < \boldsymbol{0}$ be; $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x_0}[$, û $\boldsymbol{f'(x)} > \boldsymbol{0}$ be; $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{b}[$ wê demê, $f(x_0)$ nirxê biçûk yê xwecih ye ji f re.

Mînak 1:

Guherîn û nirxên mezin û biçûk yên xwecih yên fonksiyona li jêr bibîne.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 1$$

Çareserî:

Fonksiyon di navbera $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ de domdar e û tê daraştin.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 1\right) = +\infty$$

Dema ku nirxê x di yek ji navberên $]-\infty, 1[\,,]1, +\infty[$ be:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

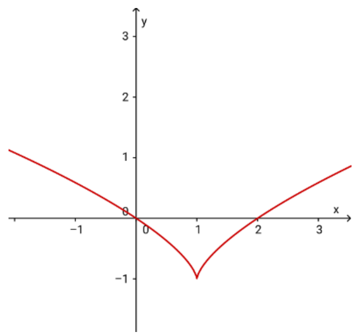
Li gorî vê, hêmaya $f'(x)$ heman hêmaya $(x-1)$ e.

Em tabloya guherîna fonksiyonê xêz bikin.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$	-		+
Guherîna $f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

Em girafîka f xêz bikin.

Di girafîkê de xwiya ye guherîna f li gorî tabloyê ye.



Mînak 2:

Guherîn û nirxên mezin û biçûk yên xwecih yên fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

Çareserî:

Fonksiyon di navbera $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ de domdar e û tê daraştin.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}(x-1) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}(x-1) = 0$

Li gorî van, tewareya XX' nêzîkera girafîka f ye.

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(x-1) = -\infty$

Li gorî van, tewareya YY' nêzîkera girafîka f ye.

$f'(x) = \frac{x^2-2x(x-1)}{x^4} = \frac{-x^2+2x}{x^4} = \frac{-x(x-2)}{x^4}$

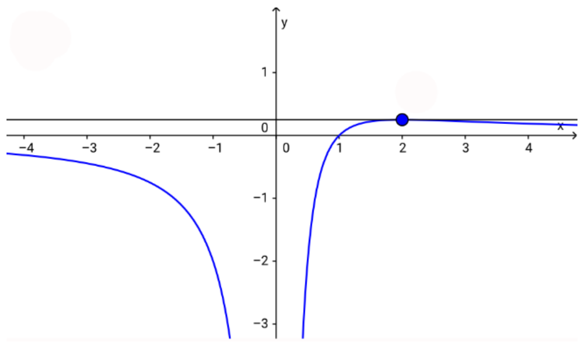
Li gorî vê, hêmaya $f'(x)$ heman hêmaya $-x(x-2)$ e.

Em tabloya guherîna fonksiyonê xêz bikin.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		-	‖	+	0	-	
Guherîna $f(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Em girafîka f xêz bikin.

Di girafîkê de xwiya ye $f(2)=\frac{1}{4}$ nirxê mezin ê xwecih e.



Mînak 3:

Eger $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ di $\mathbb{R}^*$ de fonksiyonek be.

1) Dawiyên f û nêzîkerên wê bibîne.
2) Guherîna fonksiyonê bibîne û tekez bike ku nirxên mezin û biçûk yên xwecih jê re nînin.

Çareserî:

1) Fonksiyon di navbera $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ de domdar e û tê daraştin.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0+1}{0-1}=-1 \Longrightarrow y=-1$ nêzîkera C û rastî XX' li rex $-\infty$ ye.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ rewş nediyar e, em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin;

$f(x)=\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$ li gorî vê;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1+0}{1-0}=1 \Longrightarrow y=+1$ nêzîkera C û rastî XX' li rex $+\infty$ ye.

Li gorî van, tewareya XX' nêzîkera girafîka f ye.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}(x-1)=-\infty$

Li gorî van, tewareya YY' nêzîkera girafîka f ye.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x(x-2)}{x^4}$$

Li gorî vê, hêmaya $f'(x)$ heman hêmaya $-x(x-2)$ ye.

Em tabloya guherîna fonksiyonê xêz bikin.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$		-	‖	+	0	-	
Guherîna $f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Hînkirin:

Nirxên mezin û yên biçûk yên xwecih yên fonksiyonên li jêr eger hebin, bibîne.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

c) $f(x) = 4x - x^3$ **d)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

e) $f(x) = 3 - x^{\frac{2}{3}}$ **f)** $f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}}$

g) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ **h)** $f(x) = x + \frac{4}{x-1}$

i) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ **j)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$

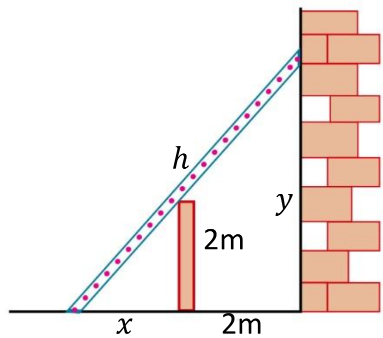
k) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ **l)** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 3$

PÊKANÎNÊN NIRXÊN MEZIN Û BIÇÛK DI JIYANÊ DE

Çareserkirina girêftariyan

Mînak 1:

Dîwarekî bilindbûna wî 2 m ye, û bi 2 m ji xaniyekî dûr e, em dixwazin sêlmekê ji erdê bigihînin xanî ku ser wî dîwarî re derbas be, dirêjahiya sêlmê ya herî biçûk bibîne.



Çareserî:

Eger dirêjahiya sêlmê h , bilindahiya aliyê jor yê sêlmê ji erdê y, dûrbûna aliyê sêlmê yê jêr ji dîwar x be:

Li gorî Pîsagoras:

$h^2 = (x+2)^2 + y^2$ (1)

Lê $\frac{y}{2} = \frac{x+2}{x}$ (wekheviya du sêgoşeyan)

Li gorî vê: $y = \frac{2x+4}{x} = 2 + 4x^{-1}$ (2)

Ji bo dirêjahiya herî biçûk ya sêlmê, divê nirxê h^2 biçûk be.

Em daraştina her du aliyên (1) û (2) li gorî x bibînin:

$\frac{d}{dx}(h^2) = 2(x+2)\times 1 + 2y\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^2}$

$\frac{d}{dx}(h^2) = 2(x+2) + 2\left(\frac{2x+4}{x}\right)\left(\frac{-4}{x^2}\right) = 2(x+2)\left(1 - \frac{8}{x^3}\right)$

Eger $\frac{d}{dx}(h^2) = 0$ be, wê demê:

$x = -2$ nayê qebûlkirin, an $\frac{8}{x^3} = 1 \Longrightarrow x = 2$

Bi xêzkirina tabloya daraştin û guherîna fonksiyonê:

x	2
Hêmaya $\frac{d}{dx}(h^2)$	- +
h^2	↘ ↗

Em dibînin ku hêmaya $\frac{d}{dx}(h^2)$ di nirxê $x = 2$ de ji – diguhere +

Nirxê $x = 2$ yê herî biçûk e, em di (1) de bi cih bikin:

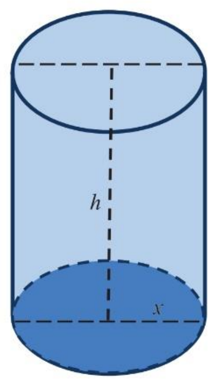
$h^2 = (x + 2)^2 + y^2 = (2 + 2)^2 + 4^2 = 32$

$h = 4\sqrt{2}$

Dirêjahiya sêlmê ya herî biçûk $4\sqrt{2}$ m ye.

Mînak 2:

Em dixwazin depoyekî avê bi awayê silindir hecimê wî $V = (2\pi)m^3$ çêkin.



1) Eger nîveşkêla binkeya depo x be, rûberê wê yê giştî S bibîne.
2) Bi dîtina guherîna fonksiyona $x \longmapsto S(x)$ û nirxê wê yê biçûk yê giştî, bilindahiya depo bibîne.

Çareserî:

1) Nîveşkêla binkeya depo $r = x$ li gorî vê, nirxê wê tam pozîtîf e, ango $x \in]0, +\infty[$ Eger bilindahî h be, wê demê hecimê depo $V = \pi . x^2 . h$ lê li gorî ku hatiye dayîn $V = (2\pi)m^3$ wê demê: $\pi . x^2 . h = 2\pi \Longrightarrow h = \frac{2}{x^2}$ Zagona dîtina rûberê giştî yê depo bi vî awayî ye: $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ li gorî vê:
$$S(x) = 2\pi r \frac{2}{x^2} + 2\pi r^2 = 2\pi\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)$$
2) Fonksiyona S di navbera $]0, +\infty[$ de domdar e û daraştî ye.

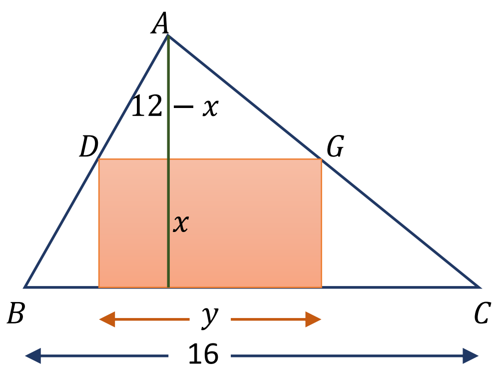
$S'(x) = 2\pi\left(2x - \frac{2}{x^2}\right) = 4\pi\left(\frac{x^3-1}{x^2}\right) = \frac{4\pi(x^2+x+1)}{x^2}(x-1)$
li gorî vê, hêmaya $S'(x)$ li gorî hêmaya $(x-1)$ e.

x	0 1 $+\infty$
$S'(x)$	- 0 +
$S(x)$	↘ 6π ↗

Nirxê biçûk yê S di navbera $]0,+\infty[$ de $S(1) = 6\pi$ ye, dema ku eşkêla binkeya depo yeksanî bilindahiyê be.

Mînak 3:

Eger ABC sêgoşeyek be, binkeya wê $BC = 16$ cm û bilindahiya wê 12 cm ye. Em dixwazin milkêşekî di hundirê sêgoşe de xêz bikin li gorî ku du goşe li ser binkeya sêgoşe, û her yek ji her du goşeyên din li ser kenarekî sêgoşe ye. dirêjahî û firehiya milkêş bi mercê ku rûberê wê yê herî mezin be, bibîne.



Çareserî:

Em dizanin ku rûberê milkêşê $S = x.y$

$\frac{y}{16} = \frac{AG}{AC} = \frac{12-x}{12}$ (li gorî wekheviya sêgoşeyan)

Li gorî vê: $y = \frac{4}{3}(12-x) \quad : x \in [0,12]$ (1)

Rûberê milkêş $S = \frac{4}{3}x(12-x)$

ango $S = f(x) = 16x - \frac{4}{3}x^2$ (2)

bi daraştina her du aliyên (2) li gorî x ê:

$f'(x) = 16 - \frac{8}{3}x \quad , \quad f''(x) = -\frac{8}{3}$

Dema ku $f'(x) = 0$ be, wê demê: $x = \frac{16\times3}{8} = 6$

li gorî vê: $f''(x) < 0$

guherîna fonksiyonê di xala $x = 6$ de ye, em di (1) de bi cih bikin:

$y = \frac{4}{3}(12 - x) = 8$

rûberê milkêş yê herî mezin dema ku dirêjahiya wê 8 cm û firehî 6 cm be.

Hînkirin:

1) Du hejmar in, komkirina wan 30, hevdana wan ya herî mezin e, her du hejmaran bibîne.

2) Em dixwazin parçeyek erd bi awayê milkêşekî bi têleke rêsayî ku dirêjahiya wê 120 m ye, dorpêç bikin. Rûberê parçeya erdê ya herî mezin ku em karibin bi heman têlê dorpêç bikin, bibîne.

3) Sêgoşeyekî tîk e, dirêjahiya jenê 30 cm ye. Eger dirêjahiya parçeya rastekan ya tîk di navbera qiraça tîk û jenê de ya herî mezin be; dirêjahiya her du kenarên din yên sêgoşeyê bibîne.

4) Têleke dirêjahiya wê 18 m ye, em dixwazin du sêgoşeyên hemkenar ji vê têlê çêkin. Dirêjahiya kenarê her yekî ji wan li gorî ku komkirina rûberê herduyan herî biçûk be, bibîne.

5) Eger dirêjahiya jenê sêgoşeyekî 10 cm be, dirêjahiya her du kenarên din li gorî ku rûberê wî herî mezin be, bibîne.

PIRSÊN BEŞA DUYEM

I. Daraştinên fonksiyonên li jêr bibîne.

1) $f(x) = e^{\sin x}$ **2)** $f(x) = (5-3x)^2$

3) $f(x) = e^{x^2+x}$ **4)** $f(x) = \ln x^x$

5) $f(x) = 1 - 2e^{-7\sin x}$ **6)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

7) $f(x) = (e^x + 2)^4$ **8)** $f(x) = e^x + \sin(3x)$

9) $f(x) = sin^3(x)$ **10)** $f(x) = x^2 \ln x$

11) $f(x) = x^2 e^{3x}$ **12)** $f(x) = \ln x^{\sin x}$

13) $f(x) = (2x+3)^7$ **14)** $f(x) = x(x^2+1)^2$

15) $f(x) = \sqrt{2-3x}$ **16)** $f(x) = \sin^2 x + 2\cos^2 x$

17) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(x+\frac{1}{x})$ **18)** $f(x) = \ln(\frac{x}{x+1})$

II. Bi sûdgirtina ji pênaseya daraştinê, her du taybetiyên li jêr tekez bike.

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

III. Hevkêşeya pêveka C di xala $M(a,b)$ de bibîne.

a) $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ $a = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x+7}$ $a = 1$

c) $f(x) = x\cos x$, $a = \frac{\pi}{4}$ **d)** $f(x) = x\sqrt{x}$, $a = 1$

IV. Fonksiyonên li jêr li rex a, tên daraştin an na?

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ $a = 0$ **b)** $f(x) = x^2 - 4x$, $a = 2$

c) $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$ $a = 0$ **d)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$ $, a = 0$

e) $f(x) = x|x|$ $a = 0$ **f)** $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$ $, a = 0$

V. Tekez bike ku $e^x \geq 1 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ û piştre $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

VI. Tekez bike ku $\ln(1+x) \leq x$ $x \in]-1,+\infty[$

VII. Her du newekheviyên li jêr li gorî ku $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$ tekez bike.

a) $x + \frac{x^3}{3} \leq \tan x$

b) $\tan x \leq x + \frac{(\tan x)^3}{3}$

piştre bi sûdgirtina ji teoriya dorpêçkirinê nirxê $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x - x}{x^3}$ bibîne.

VIII. guherîna fonksiyonên li jêr bibîne.

1) $f(x) = (x-3)^2$ **2)** $f(x) = 2x^3 - x^2$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ **4)** $f(x) = \frac{x}{x+2}$

5) $f(x) = x^2(x-2)$ **6)** $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

IX. Nirxên mezin û biçûk yên xwecih yên fonksiyonên li jêr eger hebin, bibîne.

1) $f(x) = (x-2)^2$ **2)** $f(x) = -x^4 - 8x^2 + 8$

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **4)** $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$

5) $f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$ **6)** $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

X. Eger f di $[-1, +\infty[$ de li gorî ku $f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ fonksiyonek be û C girafîka wê be.

a) Fonksiyona f li rex $x = -1$, tê daraştin an na?

b) Guherîna f bibîne, tabloya wê xêz bike û her nirxên mezin û biçûk nîşan bike.

XI. Eger f di $]0, +\infty[$ de li gorî ku $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ fonksiyonek be û C girafîka wê be.

a) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ û nêzîkerên C bibîne.

b) guherîna f bibîne, tabloya wê xêz bike û nirxê mezin nîşan bike.

XII. Dawiya fonksiyonên li jêr û rasteka nêzîkera girafîkê bibîne.

1)	$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$	Li rex $+\infty$, 0
2)	$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$	Li rex $+\infty$, 0
3)	$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{3+x}\right)$	Li rex 1, -3
4)	$f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$	Li rex $+\infty$, 0
5)	$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$	Li rex $-\infty$, 0 û $+\infty$

6)	$f(x) = e^{2x} - e^x + 1$	Li rex $+\infty$
7)	$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1}$	Li rex $+\infty$
8)	$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$	Li rex $-\infty,\ 0$ û $+\infty$
9)	$f(x) = 2x.e^x$	Li rex $+\infty$

XIII. Dawiyên fonksiyonên li jêr li gorî nirxê $\boldsymbol{a}$ bibîne.

1) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{16x^7-4x^5}{2x^7+1}}$ $\qquad a = +\infty$

2) $f(x) = \frac{x\cos x - x^2}{3x}$ $\qquad a = 0$

3) $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$ $\qquad a = 0$

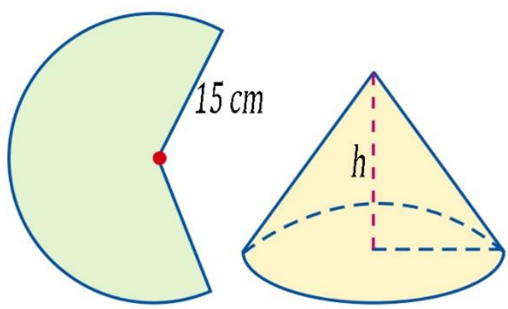
4) $f(x) = \frac{5-2x^3}{x^2+1}$ $\qquad a = -\infty$

5) $f(x) = \sqrt{x^2-4} + 2x$ $\qquad a = -\infty$

6) $f(x) = \sqrt{9x^2-4x} - 3x$ $\qquad a = +\infty$

XIV. Têleke dirêjahiya wê 20 m ye, em dixwazin milkêşekê jê çêkin. Dirêjahî û firehiya milkêşê li gorî ku rûberê wê herî mezin be, bibîne.

XV. Parçeyeke giroverê ye, nîveşkêla wê 15 cm ye, em dixwazin kovikeke ku bilindahiya wê h be jê çêkin. Hecmê kovikê $V = \frac{\pi}{3}.h(225 - h^2)$ e. hecmê herî mezin ê kovikê ku em dikarin çêkin, bibîne.

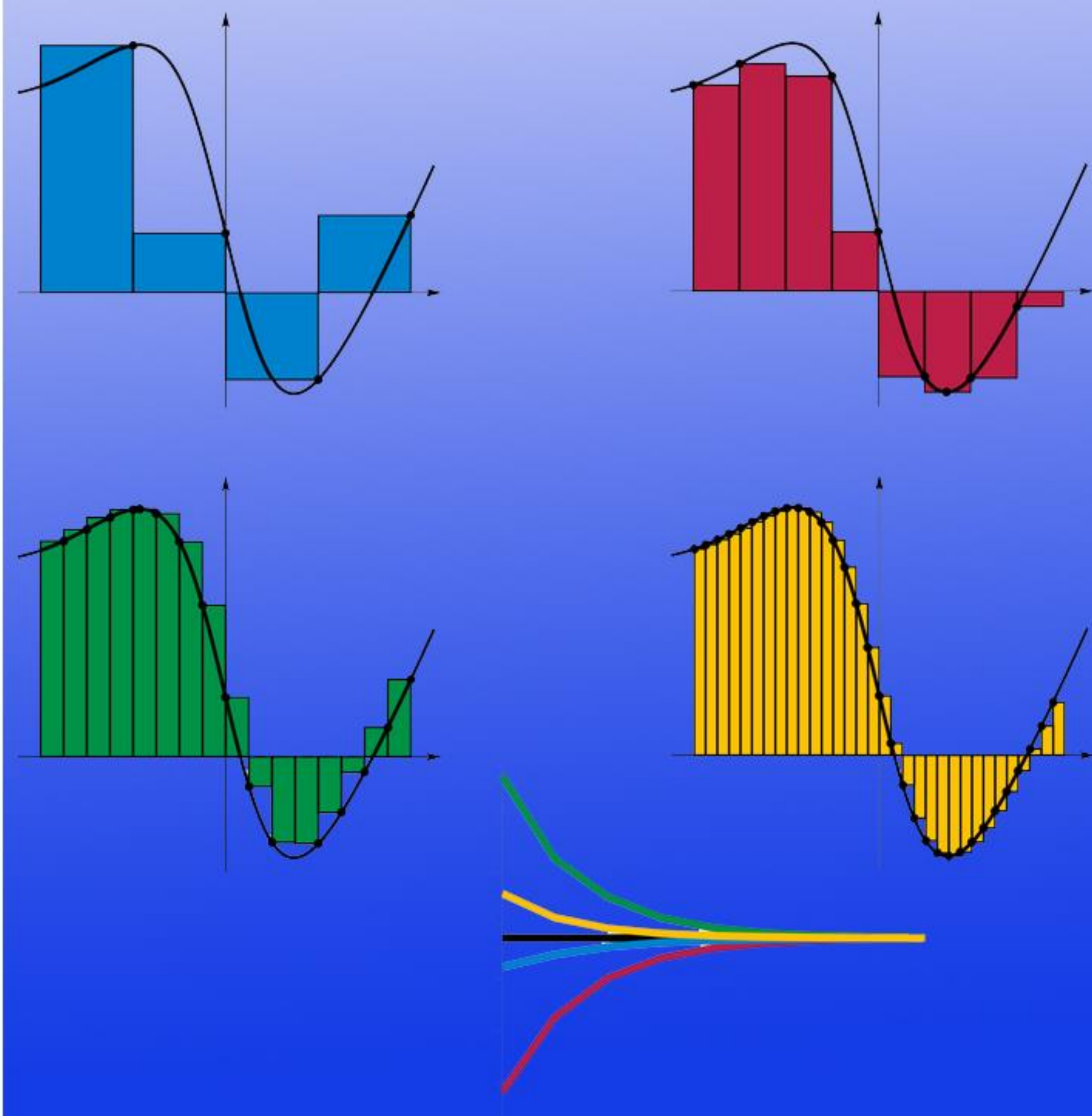


XVI. $ABCD$ kelkutekî duhemkenar e, derdora wî 40 m ye û qiraça $C = 60°$ ye. dirêjahiya her çar kenarên kelkut li gorî ku rûberê wî herî mezin be bibîne. (bersiv: 10, 10, 5, 15)

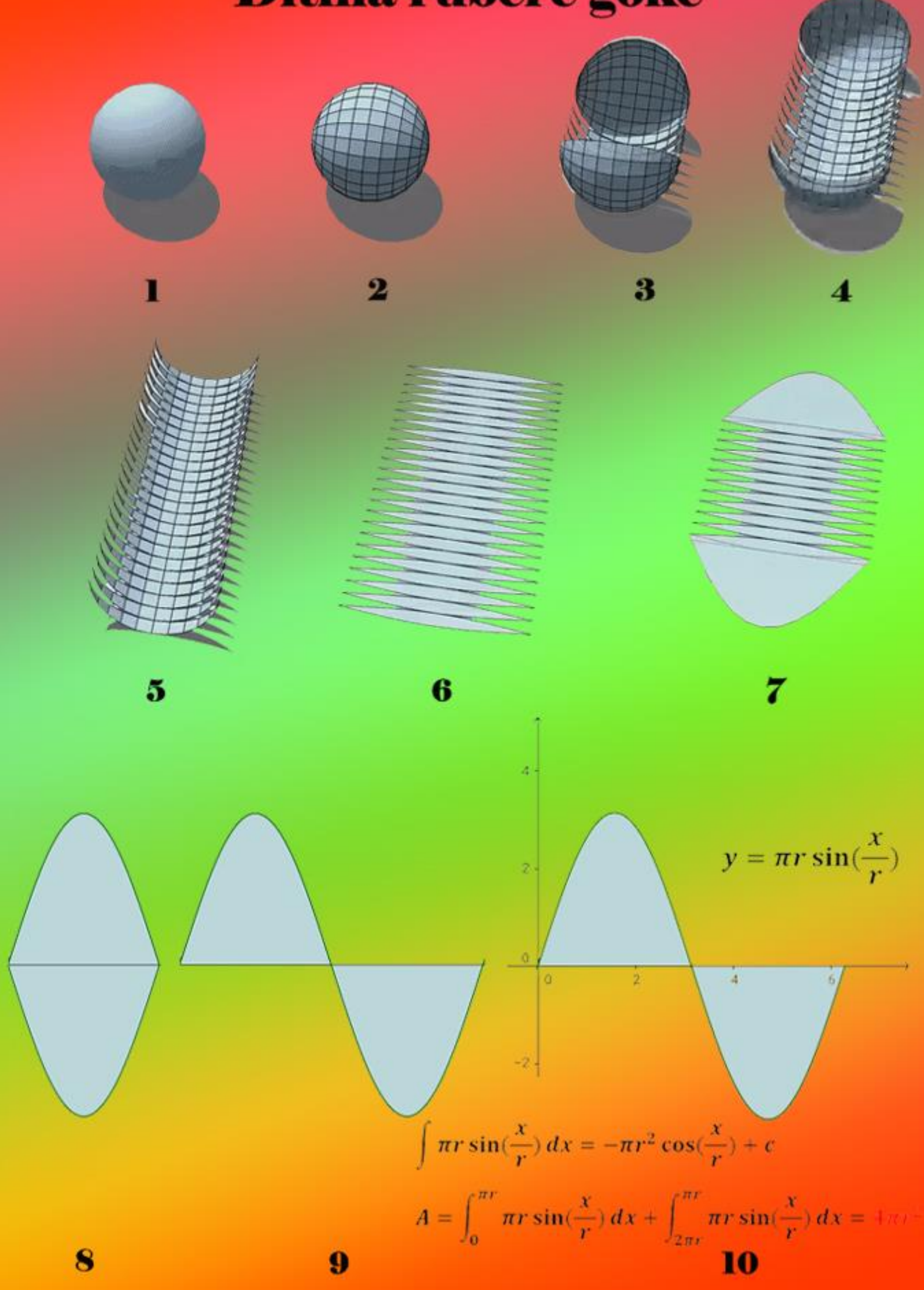
BEŞA SÊYEM

FONKSIYONÊN RESEN Û INTEGRAL

1) Fonksiyonên resen
2) Integral
3) Integrala bi sînor



Dîtina rûberê gokê



FONKSIYONÊN RESEN

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{I}$ de fonksiyonek be û $\boldsymbol{F}$ di $\boldsymbol{I}$ de fonksiyonek daraştî be û $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ be, wê demê; $\boldsymbol{F}$ **fonksiyona resen** a $\boldsymbol{f}$ ye.

Mînak:

Fonksiyon $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	Fonksiyona resen $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{f(x) = 2x + 2}$	$\boldsymbol{F(x) = x^2 + 2x + 3}$
$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}$	$\boldsymbol{F(x) = \sqrt{x^2 + 4}}$
$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$	$\boldsymbol{F(x) = \sin x + 6}$
$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x}}$	$\boldsymbol{F(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$

Teorî:

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{I}$ de fonksiyonek be û $\boldsymbol{F}$ fonksiyona resen a $\boldsymbol{f}$ be wê demê:

a) Her fonksiyona bi awayê $\boldsymbol{G: x \rightarrow F(x) + k}$ fonksiyona resen e ya $\boldsymbol{f}$ ye ($\boldsymbol{k}$ neguhêr e).
b) Her fonksiyona bi awayê $\boldsymbol{G(x) = F(x) + k}$ fonksiyona resen e ya $\boldsymbol{f}$ ye ($\boldsymbol{k}$ neguhêr e).
c) Eger $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{y_0} \in \mathbb{R}$ wê demê yek fonksiyona resen heye $\boldsymbol{G}$ ya $\boldsymbol{f}$ ye ku $\mathbf{G}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{y_0}$

Teoriya bingehîn:

Eger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{I}$ de fonksiyoneke domdar be, wê demê **fonksiyona resen** jê re di $\boldsymbol{I}$ de heye.

Mînak:

Tekez bike ku $\boldsymbol{F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}}$ di $[\mathbf{0},+\infty[$ de, fonksiyona resen e ya $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ di $]\mathbf{0},+\infty[$ de ye.

Çareserî:

Ji ber ku $\boldsymbol{x\rightarrow x}$ û $\boldsymbol{x\rightarrow\sqrt{x}}$ di $]\mathbf{0},+\infty[$ de daraştî ne, hevdana wan jî daraştî ye, li gorî vê:

$$\boldsymbol{F'(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x}=\sqrt{x}=f(x)}$$

Fonksiyonên resen ên fonksiyonên naskirî

Di tabloya li jêr de $\boldsymbol{F(x)}$ fonksiyoneke resen a $\boldsymbol{f(x)}$ e, $\boldsymbol{C}$ neguhêr e.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	**Nevber** $\boldsymbol{I}$
$\mathbf{0}$	C	$I\subseteq\mathbb{R}$
$\boldsymbol{a}\ :\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^*$	$ax+c$	$I\subseteq\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x^n},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$I\subseteq\mathbb{R}$
$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^n}},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*/\{\mathbf{1}\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1}+c$	$I\subseteq\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\sin x}$	$-\cos x+c$	$I\subseteq\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\cos x}$	$\sin x+c$	$I\subseteq\mathbb{R}$

Teorî:

a) Eger $\boldsymbol{F,G}$ di $\boldsymbol{I}$ de du fonksiyonên resen yên $\boldsymbol{f,g}$ bin, wê demê $\boldsymbol{F+G}$ di $\boldsymbol{I}$ de **fonksiyona resen** e ya $\boldsymbol{f+g}$ ye.
b) Eger $\boldsymbol{F}$ di $\boldsymbol{I}$ de fonksiyonek resen ya $\boldsymbol{f}$ be, $\boldsymbol{\lambda}$ hejmareke rast be, wê demê $\boldsymbol{\lambda F}$ di $\boldsymbol{I}$ de **fonksiyona resen** e ya $\boldsymbol{\lambda f}$ ye.

Mînak:

Li gorî rewşên li jêr fonksiyona resen $\boldsymbol{F}$ bibîne.

1) $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^3}}$ $\quad I =]-\infty, 0[$
2) $\boldsymbol{f(x) = \sin^2 x}$ $\quad I = \mathbb{R}$
3) $\boldsymbol{f(x) = \cos 5x \,.\, \sin x}$ $\quad I = \mathbb{R}$
4) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x} - 5}$ $\quad I =]0, +\infty[$
5) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2}}$ $\quad I =]0, +\infty[$
6) $\boldsymbol{f(x) = \tan^2 x}$ $\quad I =]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Çareserî:

1) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$ di $]-\infty, 0[$ de.

2) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

3) $f(x) = \cos 5x \,.\, \sin x = \frac{1}{2}\,(\sin(5x + x) - \sin(5x - x))$

$= \frac{1}{2}\, sin6x - \frac{1}{2} sin4x$

$F(x) = \frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 4x$

4) $f(x) = \frac{3}{x} - 5 = 3.\frac{1}{x} - 5$

$F(x) = 3\ln x - 5x$

5) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} = x^3 - x^2$

$F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x}$

6) $f(x) = \tan^2 x = 1 + \tan^2 x - 1$

$F(x) = \tan x - x$

Hin rewşên cuda

Fonksiyon $f(x)$	Fonksiyona resen $F(x)$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$ $\ln(-u)$
$u'e^u$	e^u
$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\cos u$	$\sin u$

Mînak:

Li gorî rewşên li jêr, ji bo her fonksiyonê; fonksiyona resen bibîne.

1) $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3 \quad I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{2}{x+3} \quad I =]-\infty, -3[$
3) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3} \quad I = \mathbb{R}$
4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad I =]1, +\infty[$
5) $f(x) = xe^{x^2} \quad I = \mathbb{R}$
6) $f(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad I =]1, +\infty[$

Çareserî:

1) $f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$

Eger $u(x) = x^2 - 4x + 5$ wê demê $u'(x) = 2(x-2)$ li gorî vê:

$$f(x) = \frac{1}{2}u'(x)\big(u(x)\big)^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{\big(u(x)\big)^4}{4} = \frac{1}{8}(x^2-4x+5)^4$$

2) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

Eger $u(x) = x + 3$ li gorî vê:

$$f(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$$

$$F(x) = 2\ln(-x-3) = \ln(x+3)^2$$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$

Eger $u(x) = x^2 - x + 3$ li gorî vê:

$f(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$

$F(x) = \ln u(x) = \ln(x^2 - x + 3)$

4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

bikaranîna parvekirina Yûklîd, wê demê $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

Eger $u(x) = x - 1$ li gorî vê:

$f(x) = \frac{3}{u(x)} + 2 = 3\frac{u'(x)}{u(x)} + 2$

$F(x) = 3\ln(u(x)) + 2x = 3\ln(x-1) + 2x$

5) $f(x) = xe^{x^2}$

Eger $u(x) = x^2$ wê demê:

$f(x) = \frac{1}{2}u'(x).e^{u(x)}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{u(x)} = \frac{1}{2}e^{x^2}$

6) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

Eger $u(x) = \ln x$ wê demê:

$f(x) = \frac{u\prime(x)}{u(x)}$

$F(x) = \ln(\ln x)$

Hînkirin:

Li gorî rewşên li jêr, ji bo her fonksiyonê; fonksiyona resen bibîne.

1) $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - 2x + 3 \qquad I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \frac{1}{x^4} \qquad I =]0, +\infty[$
3) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2} \qquad I =]-\infty, 0[$
4) $f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2} \qquad I =]1, +\infty[$
5) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} \qquad I =]-\infty, -1[$
6) $f(x) = \frac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}} \qquad I =]1, +\infty[$
7) $f(x) = \frac{5}{4x-3} \qquad I =]-\infty, \frac{3}{4}[$
8) $f(x) = \frac{3x+1}{2x} \qquad I =]0, +\infty[$
9) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \qquad I =]-\infty, 2[$
10) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1} \qquad I =], +\infty[$
11) $f(x) = \cos^2 3x \qquad I = \mathbb{R}$
12) $f(x) = \cos^4 x \qquad I = \mathbb{R}$
13) $f(x) = \cos 3x . \cos x \qquad I = \mathbb{R}$
14) $f(x) = \cot^2 x \qquad I =]0, \pi[$
15) $f(x) = \tan x \qquad I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
16) $f(x) = \cot x \qquad I =]0, \pi[$
17) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2x}} \qquad I =]-\infty, \frac{3}{2}[$
18) $f(x) = x . \sqrt[3]{(x^2+1)^2} \qquad I = \mathbb{R}$
19) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3-x^2}} \qquad I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

INTEGRAL

Eger $F_1(x) = x^5$ fonksiyona resen a $f(x) = 5x^4$ be (ji ber ku $F_1'(x) = 5x^4$), lê $F_2(x) = x^5 + 1$, $F_3(x) = x^5 - 3$ jî fonksiyonên resen in ên $f(x) = 5x^4$ (ji ber ku daraştina her duyan $f(x) = 5x^4$ e). Bi awayekî giştî, hejmarek bêdawî fonksiyonên resen ên fonksiyona $f(x) = 5x^4$ hene û bi vî awayî tê nivîsndin:

$F(x) = x^5 + C$: (C hejmarek neguhêr e).

Eger $f(x)$ di $I \subseteq \mathbb{R}$ de fonksiyonek be, ji koma fonksiyonên resen re $F(x) + C$ Integrala bê sînor a $\boldsymbol{f(x)}$ tê gotin.
($\boldsymbol{c}$ hejmarek neguhêr e), û $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{dF(x)}}{\boldsymbol{dx}}$

Sembola integralê ev e: $\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + c}$

Û bi vî awayî tê xwendin: Integrala bê sînor a $\boldsymbol{f(x)dx}$.

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ ango $dF(x) = f(x)dx$

Mînak:

Eger:

$f(x) = (x^5) \Longrightarrow (x^5)' = 5x^4dx$

$f(x) = (e^{3x}) \Longrightarrow (e^{3x})' = 3e^{3x}dx$

$f(x) = (\cos x^2) \Longrightarrow (\cos x^2)' = -2x \sin x^2\, dx$

Wê demê:

$\int 5x^4dx = x^5 + c$

$\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + c$

$\int -2x \sin x^2\, dx = \cos x^2 + c$

Ango integral berûvajî daraştinê ye.

Zagonên integralê

1) **Integrala hejmara neguhêr**
Eger $\boldsymbol{a}$ hejmarek neguhêr be, wê demê:
$\int a\,dx = ax + c$
Mînak:
integralên li jêr bibîne.
a) $\int 5dx$
b) $\int -7dx$
c) $\int -\frac{5}{3}dx$
Çareserî:
a) $\int 5dx = 5x + c$
b) $\int -7dx = -7x + c$
c) $\int -\frac{5}{3}dx = -\frac{5}{3}x + c$

2) $\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$ **lê** $\boldsymbol{n \neq -1}$
Mînak:
integralên li jêr bibîne.
a) $\int x^3 dx$
b) $\int \frac{1}{x^4}dx$
c) $\int x^{\frac{2}{5}}dx$
Çareserî:
a) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{4}x^4 + c$
b) $\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3x^3} + c$
c) $\int x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + c = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}} + c$

3) **Derxistina hejmara neguhêr ji integralê yan jî vegerandina hejmara neguhêr li integralê:**
$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ ji ber ku daraştina her du aliyan heman encamî dide: $af(x) = af(x)$
Mînak:
integralên li jêr bibîne.
a) $\int 7x^4 dx$
b) $\int \frac{-2}{x^3}dx$
c) $\int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}}dx$

Çareserî:

a) $\int 7x^4 dx = 7\int x^4 dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{7}{5}x^5 + c$

b) $\int \frac{-2}{x^3} dx = -2\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -2\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$

$= -2\frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$

c) $\int \sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}} dx = \sqrt{5}\int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt{5}x^{-\frac{2}{3}} + c$

4) **Integrala komkirina cebrî ya çend fonksiyonan, yeksanî komkirina cebrî ya integrala wan fonksiyonan e.**

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Mînak:

integralên li jêr bibîne.

a) $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

b) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right) dx$

c) $\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right) dx$

Çareserî:

a) $\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$

b) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right) dx = \int \sqrt{x} dx - 2\int \frac{1}{x^3} dx$

$= \int x^{\frac{1}{2}} dx - 2\int x^{-3} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \frac{3}{2}\, x^{\frac{3}{2}} + x^{-2} + c$

c) $\int \left(x^5 - \sqrt{2}x - \frac{3}{x^2}\right) dx = \int x^5 dx - \sqrt{2}\int x dx - 3\int x^{-2} dx$

$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 3x^{-1} + c$

5) $\int (\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{dx} = \frac{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}+1}}{(\boldsymbol{n}+1).\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{c}$

Mînak:

integralên li jêr bibîne.

a) $\int (3x - 7)^4 dx$

b) $\int (x + 5)^7 dx$

Çareserî:

a) $\int (3x - 7)^4 dx = \frac{(3x-7)^5}{(5).(3)} + c = \frac{(3x-7)^5}{15} + c$

b) $\int (x + 5)^7 dx = \frac{(x+5)^8}{(8).(1)} + c = \frac{(x+5)^8}{8} + c$

6) $\int \boldsymbol{\cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c}$

$\int \boldsymbol{\sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c}$

Mînak:

integralên li jêr bibîne.

a) $\int \cos(9x)\,dx$

b) $\int \sin(9x)\,dx$

c) $\int (\sin x + \cos x)\,dx$

d) $\int 2.\sin 5x.\cos x\,dx$

Çareserî:

a) $\int \cos(9x)\,dx = \frac{1}{9}\sin(9x)+c$

b) $\int \sin(9x)\,dx = -\frac{1}{9}\cos(9x)+c$

c) $\int (\sin x + \cos x)\,dx = -\cos x + \sin x + c$

d) $\int 2.\sin 5x.\cos x\,dx = 2\int \sin 5x.\cos x\,dx$

$= 2\int \frac{1}{2}[\sin(5x+x)+\sin(5x-x)]\,dx$

$$= \int [\sin(6x)+\sin(4x)]\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\cos(6x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + c$$

7) Eger u di x de fonksiyonek daraştî be, $n \neq -1$ li gorî vê:

$\int \boldsymbol{u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c}$

Mînak:

integralên li jêr bibîne.

a) $\int 6x^2(2x^3-6)^4 dx$

b) $\int x^3(x^4-2)^5 dx$

c) $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}\,dx$

d) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

d) $\int \sin x\, cos^2 x.\,dx$

Çareserî:

a) $\int 6x^2(2x^3-6)^4 dx$

eger $u = 2x^3 - 6 \implies u' = 6x^2$ wê demê:

$\int 6x^2(2x^3-6)^4 dx = \int u'u^4 dx = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(2x^3-6)^5}{5} + c$

b) $\int x^3(x^4-2)^5 dx$

eger $u = x^4 - 2 \Rightarrow u' = 4x^3$ wê demê:

$$\int x^3 (x^4-2)^5 dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 (x^4-2)^5 dx$$
$$= \frac{1}{4}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{24}(x^4-2)^6 + c$$

c) $\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}dx$

eger $u = x^3+3x+1 \Rightarrow u' = 3x^2+3 = 3(x^2+1)$ wê demê:

$$\int (x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\int 3(x^2+1)(x^3+3x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int u'u^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{9}(x^3+3x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

d) $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}.\ln x\, dx$

eger $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ wê demê:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{1}{x}.\ln x\, dx = \int u'u^1 dx = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$$

e) $\int \sin x \,.\cos^2 x\, dx$

eger $u = \cos^2 x \Rightarrow u' = -\sin x$ wê demê:

$$\int \sin x\,.\cos^2 x\, dx = -\int -\sin x\,.\cos^2 x\, dx$$
$$= -\int u'u^2 dx = -\frac{u^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

8) Eger u di x de fonksiyonek daraştî be, li gorî vê:

$$\boldsymbol{\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + c}$$

Mînak:

integralên li jêr bibîne.

a) $\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx$

b) $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$

c) $\int \frac{x+\cos^2 x}{x^2+\sin 2x}dx$

Çareserî:

a) $\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx$

eger $u = x^4+2x+1 \Rightarrow u' = 4x^3+2 = 2(2x^3+1)$ wê demê:

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^4 + 2x + 1| + c$$

b) $\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx$

eger $u = e^{2x^2} + 5 \implies u' = 4xe^{2x^2}$ wê demê:

$\int \frac{xe^{2x^2}}{e^{2x^2}+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u\prime}{u}dx == \frac{1}{4}\ln|u| + c = \frac{1}{4}\ln\left|e^{2x^2} + 5\right| + c$

c) $\int \frac{x+\cos^2 x}{x^2+\sin 2x}dx$

eger $u = x^2 + \sin 2x \implies u' = 2x + 2\cos^2 x = 2(x + \cos^2 x)$ wê demê:

$\int \frac{x+\cos^2 x}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+\cos^2 x)}{x^2+\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx$

$\frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2 + \sin 2x| + c$

9) $\boldsymbol{\int u'e^u dx = e^u + c}$

Mînak:
integrala li jêr bibîne.
$\int 2x.e^{x^2+4}dx$

Çareserî:

$$\int 2x.e^{x^2+4}dx$$

eger $u = x^2 + 4 \implies u' = 2x$ wê demê:

$$\int 2x.e^{x^2+4}dx = \int u'e^u dx = e^u + c = e^{x^2+4} + c$$

Integrala bi parçeyan

Dîtina hin integralan bi awayê rasterast zehmet e, wek integralên li jêr:

$\int \sin x\, e^{-x}dx$, $\int x \sin x\, dx$

Ji ber vê yekê pêdivî bi parçekirinê heye, ew jî bi guhertina vê bi awayê komkirina cebrî ya fonksiyonekê û integralekê ye.

Zagona integrala bi parçeyan

$(uv)' = u'v + uv'$ (zagona daraştina hevdana du fonksiyonan)

$uv = \int u'v\, dx + \int u\, v'dx$ (integrala her du aliyan)

$\int u\, v'dx = \boldsymbol{uv} - \int u'v\, dx + \boldsymbol{c}$ **zagona integrala bi parçeyan)**

Têbînî:

Integrala bi parçeyan ji bo hevdana du fonksiyonan tê bikaranîn.

Mînak:

Eger u, v' du fonksiyon bin:

a) Eger hevdana du fonksiyonên (rast û bi hêz) be, wê demê $u =$ rast, $v' =$ bi hêz e.
b) Eger hevdana du fonksiyonên (rast û bi sêgoşeyî) be, wê demê $u =$ rast, $v' =$ bi sêgoşeyî ye.
c) Eger hevdana du fonksiyonên (rast û bi logarîtma) be, wê demê $u =$ logarîtma, $v' =$ rast e.

Mînak 1:

$\int x.e^x\,dx$ bibîne

Çareserî:
eger $u = x \implies u' = 1$
$v' = e^x \implies v = e^x$ wê demê:
$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx$
$\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x.(1)\,dx$
$= x.e^x - e^x$

Mînak 2:
$\int x.\cos 5x\,dx$

Çareserî:
eger $u = x \implies u' = 1$
$v' = \cos 5x \implies v = \frac{1}{5}\sin 5x$ wê demê:
$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx$
$\int x.\cos 5x\,dx = x.(\frac{1}{5}\sin 5x) - \int(\frac{1}{5}\sin 5x).(1)\,dx$
$= \frac{1}{5}x.\sin 5x - \frac{1}{25}\cos 5x + c$

Mînak 3:
$\int x.\ln x\,dx$

Çareserî:
eger $u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x}$
$v' = x \implies v = \frac{x^2}{2}$ wê demê:
$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx$

$$\int x.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.(\frac{1}{x})\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Mînak 3:

$I = \int x^2.e^x\,dx$ bibîne

Çareserî:
eger $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$ wê demê:
$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx$
$\int x^2.e^x\,dx = x^2.e^x - \int 2xe^x\,dx$
ji bo dîtina $\int 2xe^x\,dx$ em integrala bi parçeyan li aliyê rastê careke din bi kar bînin
eger $u = x \Rightarrow u' = 1$
$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - 2\int e^x\,dx = 2x.e^x - 2e^x$$

wê demê:

$$I = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

Mînak 4:

$\int x^3.\sin(2x^2)\,dx$

Çareserî:
eger $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v' = x\sin(2x^2) \Rightarrow v = -\frac{1}{4}\mathrm{coc}(2x^2)$ wê demê:
$\int u.v'\,dx = u.v - \int v.u'\,dx$

$$\int x^3.\sin(2x^2)\,dx = -\frac{1}{4}x^2\,\mathrm{coc}(2x^2) + \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{coc}(2x^2)dx$$
$$= -\frac{1}{4}x^2\,\mathrm{coc}(2x^2) + \frac{1}{8}\sin(2x^2) + c$$

Integrala bi parçeyên kertan

Eger $h(x)$, $g(x)$ du fonksiyonên pir pêkhate bin, wê demê: $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ fonksiyoneke kertî ye.

Mînak:

Fonksiyonên li jêr, fonksiyonên kertî ne

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+1}$, $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^3+1}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$

Lê fonksiyonên li jêr, ne fonksiyonên kertî ne

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $f(x) = \frac{\sin x + e^x}{x^2}$, $f(x) = \frac{x-2}{x^3}$

Ji bo dîtina integrala fonksiyona kert $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, divê em fonksiyonê parçe bikin û biguhêrin komkirina çend fonksiyonên kert yên sade (ji ber ku em nikarin integrala wê bi awayekî rasterst bibînin), piştre dîtina integrala wan hêsan dibe.

Integrala fonksiyona bi kerta sade

Fonksiyona bi kerta sade:

Dema ku pileya parê biçûktir be ji pileya paranê (piştî nivîsandina wan bi awayekî sade).

Mînak: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

Ji bo dîtina integrala fonksiyona bi kerta sade $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sê rewş hene:

1) Eger em karibin paranê bi vî awayî binivîsin:
$g(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_n)$
(pêkhateyên paranê ji pileya yekem in û dubare nabin)
wê demê fonksiyona f bi vî awayî tê nivîsandin:
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$
li gorî ku $A_1, A_1 \ldots\ldots A_n$ hejmaên rast in.

2) Eger em karibin paranê bi vî awayî binivîsin:
$q(x) = (x - a)^n$
(pêkhateyên paranê ji pileya yekem in û yek ji wan dubare

dibe), wê demê fonksiyona f bi vî awayî tê nivîsandin:
$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x+a)}+\frac{A_2}{(x+a)^2}\dots\dots+\frac{A_n}{(x+a)^n}$
li gorî ku $A_1, A_1 \dots\dots A_n$ hejmaên rast in.

3) Eger em karibin paranê bi vî awayî binivîsin: $q(x)=(x^2+tx+s)(x-a_1)\dots\dots(x-a_n)$
(yek ji pêkhateyên paranê ji pileya duyem e û dubare nabin) wê demê fonksiyona f bi vî awayî tê nivîsandin:
$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{B_x+c}{x^2+tx+s}+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_1}{x-a_2}\dots\dots+\frac{A_n}{x-a_n}$
li gorî ku $\mathrm{B}, \mathrm{C}, A_1, A_1 \dots\dots A_n$ hejmaên rast in.

Mînak 1:

$I=\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx$ bibîne

Çareserî:

Li gorî rewşa yekem:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}\quad(1)$$

bi hevdana her du aliyên hevkêşeyê bi x^2-4 re:

$$2x+1=A(x+2)+B(x-2)$$

$$x=2\Longrightarrow 2(2)+1=A(2+2)+B(2-2)$$

$$5=4A\Longrightarrow A=\frac{5}{4}$$

$$x=-2\Longrightarrow 2(-2)+1=A(-2+2)+B(-2-2)$$

$$-3=-4B\Longrightarrow B=\frac{3}{4}$$

Eger me $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ di (1) de bi nirxên wan guhertin, wê demê:

$$\frac{2x+1}{x^2-4}=\frac{5}{4}\frac{1}{(x-2)}+\frac{3}{4}\frac{1}{(x+2)}$$

$$\Longrightarrow\int\frac{2x+1}{x^2-4}dx=\frac{5}{4}\int\frac{1}{(x-2)}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{(x+2)}dx$$

$$=\frac{5}{4}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|+\frac{3}{4}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{2}|+\boldsymbol{c}$$

Mînak 2:

$I=\int \frac{x+6}{x^2+5x+6}dx$ bibîne

Çareserî:

Li gorî rewşa yekem:

$$\frac{x+6}{x^2+5x+6}=\frac{x+6}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+3)}$$

bi hevdana her du aliyên hevkêşeyê bi $(x+2)(x+3)$ re:

$x+6=A(x+3)+B(x+2)$

Dema ku $x=-2 \Longrightarrow -2+6=A(-2+3)+B(-2+2)$

$$\Longrightarrow A=4$$

Dema ku $x=-3 \Longrightarrow -3+6=A(-3+3)+B(-3+2)$

$$3=-B \Longrightarrow B=-3$$

Eger me $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ di (1) de bi nirxên wan guhertin, wê demê:

$$\frac{x+6}{x^2+5x+6}=4.\frac{1}{(x+2)}-3\frac{1}{(x+3)}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{x+6}{x^2-4}dx=4\int \frac{1}{(x+2)}dx-3\int \frac{1}{(x+3)}dx$$

$=4\,\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|-\mathbf{3}\,\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{3}|+\boldsymbol{c}$

Mînak 3:

$I=\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx$ bibîne

Çareserî:

Li gorî rewşa duyem

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

bi hevdana her du aliyên hevkêşeyê bi$(x^2-1)(x-1)$ re:

$3x-1=A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$

Dema ku $x=1 \Longrightarrow 3(1)-1=A(1-1)^2+B(1+1)(1-1)+C(1+1)$

$$2=2C \Longrightarrow C=1$$

Dema ku $x=-1 \Longrightarrow 3(-1)-1=A(-1-1)^2+B(1+1)(1-1)+C(1+1)$

$$-4 = 4A \Longrightarrow A = -1$$

Eger $x = 0 \Longrightarrow 3(0) - 1 = A(0-1)^2 + B(0+1)(0-1) + C(0+1)$

$$-1 = A - B + C \Longrightarrow B = A + C + 1 = 1$$

Eger me $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ di (1) de bi nirxên wan guhertin, wê demê:

$$\frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)} = -\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{3x-1}{(x^2-1)(x-1)}dx = -\int \frac{1}{(x+1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= -\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| + \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| + (x-1)^{-1} + \boldsymbol{c} = \mathbf{ln}\left|\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\right| - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}} + \boldsymbol{c}$$

Mînak 4:

$I = \int \frac{x^2+2}{x^2(x+2)}dx$ bibîne

Çareserî:

Li gorî rewşa duyem

$$\frac{x^2+2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+2)}$$

bi hevdana her du aliyên hevkêşeyê bi$x^2(x+2)$ re:

$$x^2 + 2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2$$

Dema ku $x = -2 \Longrightarrow (-2)^2 + 2 = A(-2)(-2+2) + B(-2+2) + C(-2)^2$

$$6 = 4C \Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

Dema ku $x = 0 \Longrightarrow (0)^2 + 2 = A(0)(0+2) + B(0+2) + C(0)^2$

$2 = 2B \Longrightarrow B = 1$

Eger $x = 1 \Longrightarrow (1)^2 + 2 = A(1)(1+2) + B(1+2) + C(1)^2$

$$3 = 3A + 3B + C \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Eger me $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ di (1) de bi nirxên wan guhertin, wê demê:

$$\frac{x^2+2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^2(x+2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}| - \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{2}| + \boldsymbol{c}$$

Mînak 5:

$I = \int \frac{4}{x(x^2+4)}dx$ bibîne

Çareserî:

Li gorî rewşa sêyem;

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+D}{x^2+4} \Longrightarrow$$

$4 = A_1(x^2+4) + Bx + D.x$

$4 = \mathrm{A}x^2 + 4A + Bx^2 + Dx \Longrightarrow$

$4 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2 + Dx + 4A$

$(0)x^2 + (0)x + 4 = (\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2 + Dx + 4A$

Bi hevrûkirina her du aliyan tê dîtin ku:

$\mathrm{A}+\mathrm{B} = 0 \quad (1)$

$D = 0 \qquad (2)$

$4A = \mathbf{4} \qquad (\mathbf{3}) \Longrightarrow A = 1$ em di (1) de bi cih bikin:

$1 + \mathrm{B} = 0 \quad \Longrightarrow B = -1$

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+4}$$

$$\int \frac{4}{x(x^2+4)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int -\frac{1}{2}.\frac{2x}{x^2+4}dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c$$

Ji bo dîtina integrala fonksiyona bi kerta hevgirtî $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$:

Eger pileya parê ji ya paranê mezintir be, em ê parê belavî paranê bikin, wê demê fonksiyona f bi vî awayî tê nivîsandin:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = H(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$H(x)$ encama parvekirinê, $r(x)$ ya mayî, wê demê

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int H(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

$\int H(x)$ ev wê hêsan be.

$\int \frac{r(x)}{q(x)}$ yek ji wan her sê rewşên borî ye.

Mînak:

$I = \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$ bibîne.

Çareserî:

Ji ber ku par ji paranê mezintir e, em ê parê li paranê bi awayê Oklîd belav bikin.

$$\frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x + 1}{x^3 - x^2} = x - \frac{x + 1}{x^2(x - 1)}$$

bi parçekirina kerta dawî:

$$\frac{x + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x - 1} \Longrightarrow x + 1 = A_1(x - 1) + A_2(\mathrm{x} - 1) + A_3 x^2$$

bi çareserkirinê em dibînin ku $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = 2$ di I de bicihkirina van nirxan:

$$I = \int x\, dx - \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2}{x - 1} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x - 1| + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x - 1}\right| + c$$

Hînkirin:

1) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int\left(2\sqrt{x}-3x^{4}\right)dx$ **b)** $\int\left(\frac{3}{x^{4}}-4x^{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

c) $\int\sqrt{x}(x-3)^{2}dx$ **d)** $\int\left(\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{x^{3}}+\frac{1}{x^{4}}\right)dx$

e) $\int 3(3x^{2}-1)^{3}\,dx$ **f)** $\int(x^{4}+2x)^{2}(4x^{3}+2)dx$

2) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int\cos^{3}x\sin x\,dx$ **b)** $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$

c) $\int(1+\sin t)^{2}\cos t\,dt$ **d)** $\int x\cos(3x^{2})\,dx$

e) $\int\cos^{3}2t\sin 2t\,dt$

3) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int\sin^{2}x\,dx$ **b)** $\int x^{5}e^{x^{3}}\,dx$

c) $\int\mathrm{sin}x e^{-x}dx$ **d)** $\int\ln x\,dx$

4) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int\frac{2}{x-1}dx$ $\quad x\in]1,+\infty[$

b) $\int\frac{3x+6}{x^{2}+5x+6}dx$ $\quad x\in]-\infty,-3[$

c) $\int\frac{x+7}{x^{2}+2x-8}dx$ $\quad x\in]-4,+2[$

d) $\int\frac{8}{x^{3}(x-1)}dx$ $\quad x\in]1,+\infty[$

e) $\int\frac{x^{2}+x-1}{x^{2}(x+1)}dx$ $\quad x\in]0,+\infty[$

f) $\int\frac{x^{2}+x+2}{(x^{2}+1)(x-1)}dx$ $\quad x\in]-\infty,1[$

g) $\int\frac{x^{4}+4}{x^{2}-4}dx$ $\quad x\in]-\infty,-2[$

k) $\int\frac{2}{x^{3}+x}dx$ $\quad x\in]-\infty,0[$

l) $\int\frac{x^{3}+2}{x^{2}-1}dx$ $\quad x\in]1,+\infty[$

5) Integrala li jêr bibîne.

$$I=\int\frac{x+2}{(x-2)(x-1)^{3}}dx$$

INTEGRALA BI SÎNOR

Integrala bi sînor

Eger $f(x)$ di $[a, b]$ de, fonksiyonek be, $F(x)$ di $[a, b]$ de fonksiyona resen ya $f(x)$ be, wê demê:

$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(a) - F(b)$

Ji vê re **integrala bi sînor** tê gotin.

Bi vî awayî tê xwendin: Integrala ji a ber bi b ve.

Taybetmendiyên integrala bi sînor:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$
5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx : a < c < b$
6) $\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$

Mînak:

Integralên li jêr bibîne.

1) $\int_1^2 x\,dx$
2) $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)\,dx$
3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

Çareserî:

1) $\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
2) $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)\,dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + x)\Big|_0^3$

$$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{81}{4} - 15$$

$$= \frac{81-60}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \sin\theta \,|_1^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

Teorî:

Eger $g(x)$ be di I de fonksiyoneke daraştî; $g(I) \subset J$ û fonksiyona $f(x)$ di J de domdar be, li gorî vê:

$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$; a, b du hejmarên rast in.

Mînak:

Integrala li jêr bibîne.

$$\int_1^2 t\cos(t^2)\, dt$$

Çareserî:

$$\int_1^2 t\cos(t^2)\, dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \cos(t^2)\,(t^2)'dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \cos(g(t))\, g'(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{g(1)}^{g(2)} \cos(u)\, du = \frac{1}{2}\int_1^4 \cos(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(u)]_1^4 = \frac{1}{2}(\sin(4) - \sin(1))$$

Mînak:

Integrala li jêr bibîne.

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^2\, dx$$

Çareserî:

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^2\, dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos 2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\,[\frac{1}{2}\sin 2x + x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

Integrala bi sînor ya bi parçeyan

Eger u, v du fonksiyon bin û di $[a, b]$ de daraştina wan hebe:

$\int_a^b u(x)\, v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\, du$

Ji vê re **integrala bi sînor ya bi parçeyan** tê gotin.

Mînak 1:

Integrala li jêr bibîne.

$$\int_0^1 x. e^x. dx$$

Çareserî:

Eger $x = u \Longrightarrow u' = 1,\ \ e^x = v' \Longrightarrow v = e^x$ be, wê demê:

$\int_0^1 x. e^x\, dx = [x. e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x. dx$

$= [1. e^x - 0e^0] - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e^0 = 1$

Mînak 2:

Integrala li jêr bibîne.

$$\int_0^\pi x. \cos x\, . dx$$

Çareserî:

Eger $x = u \Longrightarrow u' = 1,\ \ \cos x = v' \Longrightarrow v = \sin x$ wê demê:

$\int_0^\pi x. \cos x\, . dx = [x. \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\, . dx$

$= 0 - [-\cos x]_0^\pi = [\cos \pi - \cos(0)]$

$= (-1 - 1) = -2$

Mînak 3:

Integrala li jêr bibîne.

$$\int_1^e \ln x\, . dx$$

Çareserî:

Eger $u = \ln x \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}$, $v' = 1 \Longrightarrow v = x$ wê demê:

$$\int_1^e \ln x \,.\, dx = [x. \ln x]_1^e - \int_1^e x. \frac{1}{x}. dx = [e \ln e - 0] - [x]_1^e$$

$$= e - 0 - (e - 1) = 1$$

Pêkanînên integralan

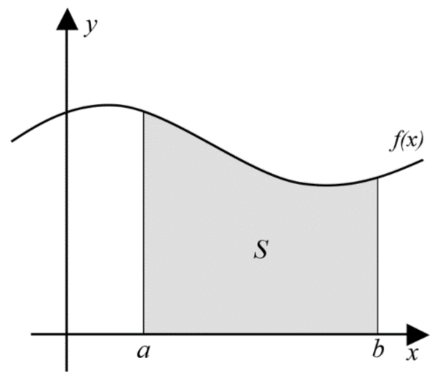
1) Dîtina rûber

Zanyarê Birêtanî **Barrow** bi armanca dîtina rûberê girafîka fonksiyonan, bingehê integrala bi sînor danî.

Integrala bi sînor bi piranî ji bo dîtina rûberê girafîkên fonksiyonan tê bikaranîn.

Mînak:

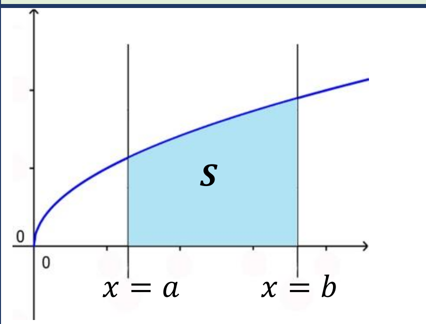
Di girafîka li kêlekê de, integrala fonksiyona $\boldsymbol{f(x)}$ di navbera du nirxan de; rûberê $\boldsymbol{S}$ yê ku bi her du rastekên $\boldsymbol{x = a, x = b}$ û ji aliyê din ve di navbera tewareya $\boldsymbol{X}$ û girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ de sînor kirî (parçeyê rengkirî) ye.



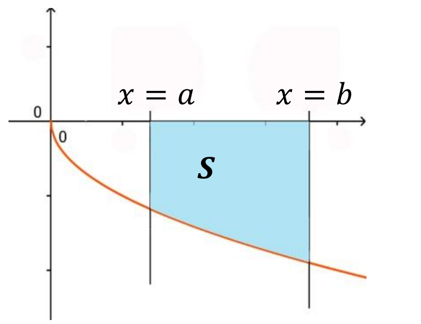
Ji bo dîtina rûber, çar rewş hene:

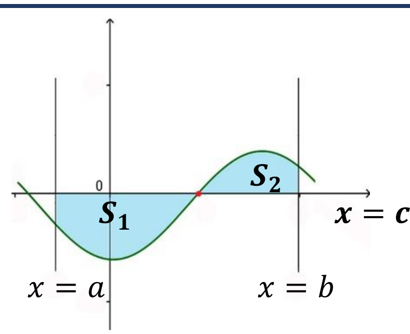
<table>
<tr><th>Rewş</th><th>Girafîk</th></tr>
<tr><td>Girafîka fonksiyonê $\boldsymbol{C}$ li jorî $\boldsymbol{XX'}$ e.

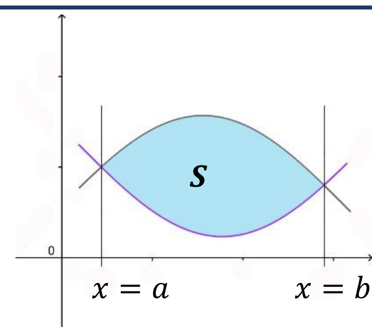
Zagon bi vî awayî ye:

$$\boldsymbol{S} = \int_{a}^{b} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Girafîka fonksiyonê $\boldsymbol{C}$ li jêrî $\boldsymbol{XX'}$ e.

Zagon bi vî awayî ye:

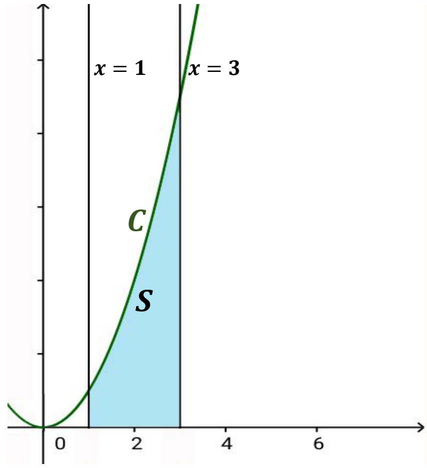
$$\boldsymbol{S} = \int_{a}^{b} -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Parçeyek ji girafîka fonksiyonê $\boldsymbol{C}$ li jorî $\boldsymbol{XX'}$ e û parçeya din li jêrî $\boldsymbol{XX'}$ e.
Zagon bi vî awayî ye:

$$\boldsymbol{S} = -\int_{a}^{c} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx} + \int_{c}^{b} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Rûber di navbera girafîka du fonksiyonan $\boldsymbol{C_1}, \boldsymbol{C_2}$ de ye, li gorî ku $\boldsymbol{C_1}$ jorî $\boldsymbol{C_2}$ ye.
Zagon bi vî awayî ye:

$$\boldsymbol{S} = \int_{a}^{b} \left(\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x})\right).\boldsymbol{dx}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Mînak 1:

Eger $f(x) = x^2$ fonksiyonek be, Rûberê di navbera girafîka $f(x)$ û tewareya XX' û her du rastekên $x = 1, x = 3$ de bibîne.



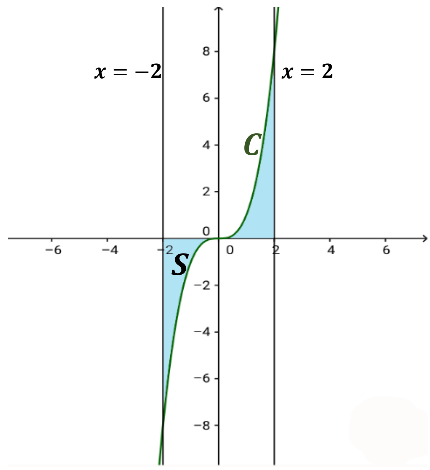
Çareserî:

$$S = \int_a^b f(x)\,.\,dx = \int_1^3 x^2\,.\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Mînak 2:

Eger $f(x) = x^3$ fonksiyonek be, Rûberê di navbera girafîka $f(x)$ û tewareya XX' û her du rastekên $x = 2, x = -2$ de bibîne.



Çareserî:

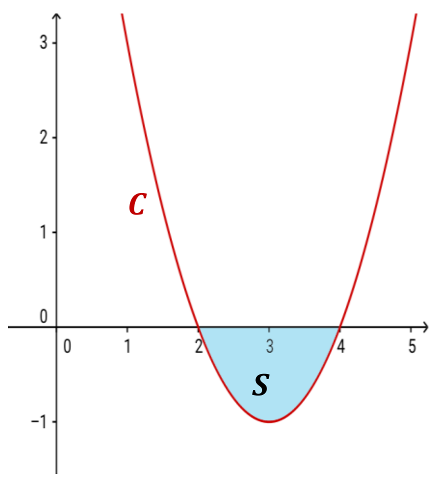
$$S = \int_{-2}^{0} -f(x) + \int_{2}^{0} f(x)\,.\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x^3\,.\,dx + \int_{-2}^{0} x^3\,.\,dx$$

$$= [-\frac{x^4}{4}]_{-2}^{0} + [\frac{x^4}{4}]_{2}^{0} = \frac{16}{4} + \frac{16}{4} = 4 + 4 = 8$$

Mînak 3:

Eger $f(x) = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonek be, Rûberê di navbera girafîka $f(x)$ û her du xalên birîna wê bi tewareya XX' re bibîne.



Çareserî:

girafîka $f(x)$ tewareya XX' dibire dema ku $f(x) = 0$ be

li gorî wê û ji bu dîtina xalên birînê:

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ yan $x = 4$

Girafîka fonksiyonê $\boldsymbol{C}$ li jêrî $\boldsymbol{XX'}$ e.

$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} -\boldsymbol{f(x)} = \int_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{4}} -(\boldsymbol{x^2 - 6x + 8})\boldsymbol{dx} = [-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x]_2^4$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3(4)^2 - 8(4)\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 3(2)^2 - 8(2)\right)$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 32\right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16\right) = \frac{-64+48}{3} + \frac{8+12}{3}$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$$

Mînak 4:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$ fonksiyonek be, Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û rasteka Δ: $\boldsymbol{y = x + 3}$ de bibîne.

Çareserî:

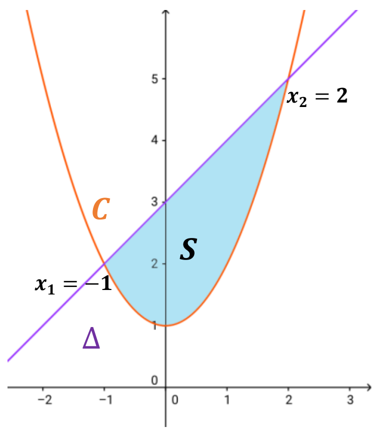
Xalên hevbirîna C bi rasteka Δ re, dibin çareseriya hevkêşeya $x^2 + 1 = x + 3$, li gorî vê:

$x^2 - x - 2 = 0$ du çareserî hene: $x_1 = -1$ yan $x_2 = 2$

Li gorî vê:

$$y_\Delta - y_C = x + 3 - 1 - x^2$$

$= 2 + x - x^2 = (1 + x)(2 - x) \geq 0$ li gorî vê:

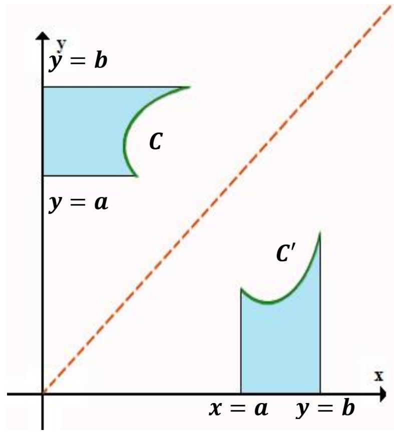


$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{-1}}^{\boldsymbol{2}} (y_\Delta - y_C)\,.\,\boldsymbol{dx} = \int_{\boldsymbol{-1}}^{\boldsymbol{2}} (-x^2 + x + 2)\,.\,\boldsymbol{dx}$$

$$= [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

Têbînî:

Ji bo dîtina rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{C}$ ya fonksiyona bi awayê $\boldsymbol{x = g(y)}$ û her du rastekên $\boldsymbol{y = a, y = b}$ de, em dikarin bi riya hemaliyê wê $\boldsymbol{C'}$ rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{C'}$ fonksiyona bi awayê $\boldsymbol{y = g(x)}$ û her du rastekên $\boldsymbol{x = a, x = b}$ de bibînin.



Mînak:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 1}$ fonksiyonek be, Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya YY' û rasteka $\boldsymbol{y = 7}$ de bibîne.

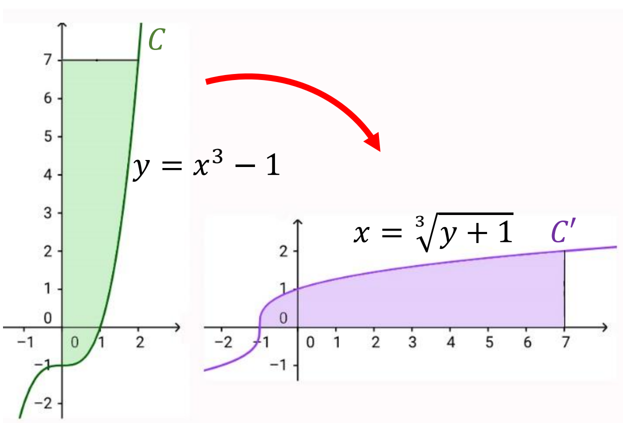
Çareser:

Tê dîtin ku $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 1 \Leftrightarrow x = g(y) = \sqrt[3]{y+1}}$

Li gorî vê, rîberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ **û** û tewareya YY' û rasteka $\boldsymbol{y = 7}$ de, yeksanî rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{g(x)}$ û tewareya XX' û rasteka $\boldsymbol{x = 7}$ de ye.

Em rûber bibînin:

$$S = \int_{-1}^{7} \sqrt[3]{x+1} \, . dx = \int_{-1}^{7} (x+1)^{\frac{1}{3}} . dx = [\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}]_{-1}^{7} dx = 12$$



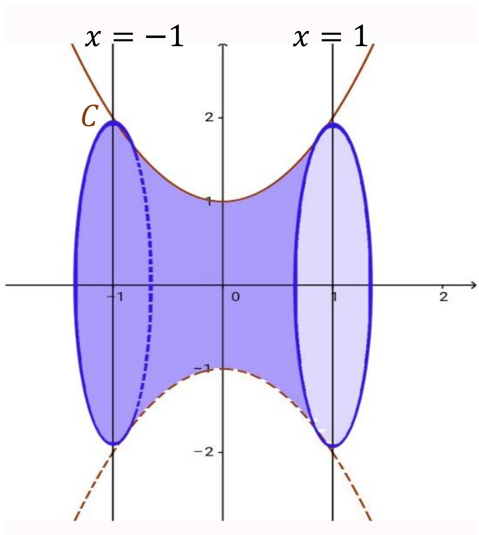
2) Dîtina hecim

Eger C girafîka fonksiyona f ya di navbera $[a,b]$ de li dora tewareya XX' bizivire, gewdeyek di navbera girafîka C û her du rastekên $x=a, x=b$ de çêdibe. Hecmê vî gewdeyî bi vê zagonê tê dîtin:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

Mînak 1:

Eger girafîka fonksiyona $f(x) = x^2 + 1$ li dora tewareya XX' bizivire, hecmê gewdeya di navbera girafîka f û her du rastekên $x = 1, x = -1$ de bibîne.



Çareserî:

$$V = \int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{\pi x^5}{5} + \frac{2\pi x^3}{3} + \pi x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi(1)^5}{5} + \frac{2\pi(1)^3}{3} + \pi(1) - \left(\frac{\pi(-1)^5}{5} + \frac{2\pi(-1)^3}{3} + \pi(-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} + \pi - \left(\frac{-\pi}{5} - \frac{2\pi}{3} - \pi\right) = \mathbf{\frac{56\pi}{15}}$$

Mînak 2:

Tekez bike ku hecmê goka nîveşkêla wê R be, yeksanî $\frac{4}{3}\pi R^3$ e.

Çareserî:

Em dizanin ku hecmê gokê yeksanî hecmê ji encama zivirandina nîv bazinê ku bi heman eşkêlê, li derdora eşkêla xwe ye.

Hevkêşeya bazinê ku navenda wê $O(0,0)$ û nîveşkêla wê R ye, bi vî awayî ye:
$x^2 + y^2 = R^2 \Longrightarrow y^2 = R^2 - x^2 \Longrightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2} : x \in [-R, +R]$

$$V = \int_{-R}^{R} \pi (f(x))^2\, dx = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[\left(R^2 . R - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 . (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = \pi \left(\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \boldsymbol{\pi \frac{4R^3}{3}}$$

Mînak 3:

Tekez bike ku hecmê kovika niveşkêla bingeha wê R û bilindahî h ye, yeksanî $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ ye.

Çareserî:

Kovik ji zivirandina parçeyekî rasteka ku bi xala destpêkê ve girêdayî ye, li derdora tewareya XX', pêk tê.

Hevkêşeya rasteka ku di xala destpêkê re derbas dibe ev e:

$y = f(x) = \frac{R}{h} x$ li gorî vê, hecmê kovikê bi vî awayî ye:

$$V = \int_0^h \pi \big(f(x)\big)^2\, dx = \pi \int_0^h \left(\frac{R}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{R^2}{h^2} . \frac{h^3}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{3} \pi R^2 h}$$

Hecmê xelekê

Eger C_1 girafîka fonksiyona f_1, C_2 girafîka fonksiyona f_2 be li gorî ku: $f_1 \geq f_2 \geq 0$ wê demê:

Hecmî xeleka ji zivirandina devera di navbera her du girafîkan û her du rastekên $x = a, x = b$ de, pêk tê, bi vê zagonê tê dîtin:

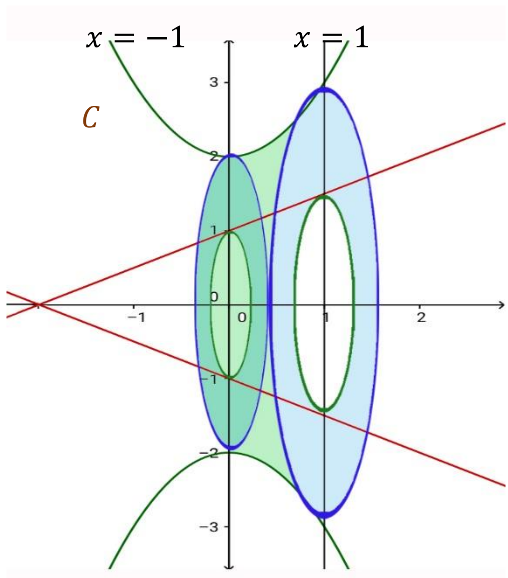
$$V = \pi \int_a^b (f_1(x))^2 - (f_2(x))^2 \, dx$$

Mînak:

Hecmê ji encama zivirandina her du fonksiyonên

$y = x^2 + 2$ û $2y - x - 2 = 0$ di navbera her du rastekên $x = 0, x = 1$ de bibîne.

Çareserî:



$$V = \pi \int_0^1 \left(f_1(x)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{15}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3\right) = \frac{79}{20}\pi$$

Hînkirin:

1) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{2-x^3}\,dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\,dx$ **d)** $\int_0^2 (2-4x)\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$ **f)** $\int_{-1}^2 |2x-3|\,dx$

2) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^2})\,dx$ **b)** $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

c) $\int_0^9 \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\,dx$

e) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ **f)** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$

3) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int_0^2 e^{2x+1}\,dx$ **b)** $\int_0^1 (e^x(e^x+2)^2)\,dx$

c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$ **d)** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

4) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$ **b)** $\int_1^4 x\sqrt{x+3}\,dx$

c) $\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,dx$ **d)** $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

e) $\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$ **f)** $\int_0^2 (x-3)e^x\,dx$

5) Eger $f_1(x)=e^x$ û $f_2(x)=e^{-x}$ be, rûberê di navbera girafîkên her du fonksiyonên f_1, f_2 û rasteka $x=1$ de bibîne.

6) Eger $f_1(x)=\ln(x)$ û $f_2(x)=\ln^2(x)$ be, rûberê di navbera girafîkên her du fonksiyonan de bibîne.

7) Eger girafîka fonksiyona $f(x)=2x\sqrt{4-x^2}$ li dora tewareya XX' bizivire, hecmê gewdeya di navbera girafîka f û her du rastekên $x=0, x=2$ de bibîne

PIRSÊN BEŞA SÊYEM

1) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **b)** $\int 5(5x^7+2)^2x^6dx$

c) $\int \sqrt{1-4x}\,dx$ **d)** $\int \sqrt[3]{5+x^3}\,(x^2)dx$

e) $\int \frac{(1+3x)dx}{\sqrt{2x+3x^2}}$ **f)** $\int (3x-x^3)^5(1-x^2)\,dx$

g) $\int \frac{t^2-4t+3\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$ **h)** $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$

2) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int x^2 \ln x\,dx$ **b)** $\int (x^2+1)^2\cos x\,dx$

c) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ **d)** $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

e) $\int 2x\cos^2 x\,dx$ **f)** $\int x^r \ln x\,dx \quad : \ r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$

3) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int \frac{x^4+x-1}{x^2+1}dx$ **b)** $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$

c) $\int \frac{x^2+2}{x-1}dx$ **d)** $\int \frac{x}{(x+1)^3}dx$

e) $\int \frac{x^2+3x+2}{x+2}dx$ **f)** $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$

g) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ **h)** $\int \frac{x^4-1}{x}dx$

4) Integralên li jêr bibîne.

a) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{9-x^2}\,dx$ **b)** $\int_{2}^{3} \frac{x^2-2}{x^2}\,dx$

c) $\int_{1}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int_{0}^{2} (x^3-1)^{\frac{2}{3}}x^2\,dx$

5) Integralên li jêr bibîne.

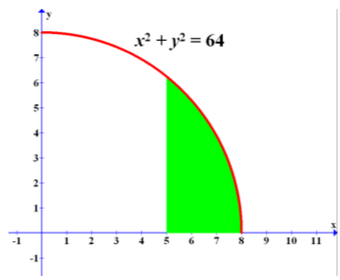
a) $\int_{0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta$ **b)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$

c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta\,d\theta$ **d)** $\int_{0}^{\pi} (\cos\theta)^2 d\theta$

e) $\int_{0}^{\pi} (\sin\theta)^3 d\theta$ **f)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta}{(\cos\theta)^2}\,d\theta$

g) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin(\sin\theta)\,d\theta$ **h)** $\int_{0}^{1} \sin(\pi t-a)\,d\theta$

6) Hecmê ji encama zivirandina girafîka fonksiyona li kêlekê, li derdora tewareya XX' pêk tê, bibîne.



7) Beroşeke bi awayê nîv gok e, nîveşkêla wê 8 cm e, kûrbûna ava ku tê de heyî 3 cm e. hecmê avê bibîne.

8) Hecmê ji encama zivirandina devera di navbera fonksiyona $f(x)$ de û rastekên hatî dayîn li derdora tewareya XX' bibîne.

a) $y = x + 1$ û $x = -4, x = 1$ b) $y = 4 - x^2$ û $x = -4, x = 3$

c) $y = 3 - x$ û $x = -1, x = 5$ d) $y = x^2 - 9$ û $x = -1, x = 4$

9) Hecmê ji encama zivirandina devera di navbera her du fonksiyonên $f(x), g(x)$ de û rastekên hatî dayîn li derdora tewareya XX' bibîne.

a) $f(x) = x, g(x) = x^2$ û $x = 0, x = 3$

b) $f(x) = x + 1, g(x) = x - 1$ û $x = 1, x = 4$

c) $f(x) = \sin x\,, g(x) = \cos x$ û $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$ û $x = -1, x = 1$

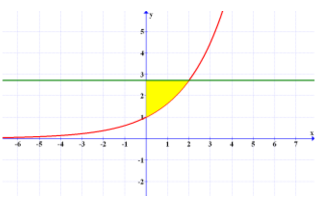
10) Hecmê ji encama zivirandina devera di navbera her du fonksiyonên $f(x), g(x)$ de li derdora tewareya XX' bibîne.

a) $f(x) = x^3, g(x) = 4x$ b) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - \sqrt{x}$

c) $f(x) = 4 - x^2, g(x) = 3$ d) $f(x) = x^2 + x, g(x) = 2x + 6$

11) Hecmê ji encama zivirandina devera di navbera her du fonksiyonên $f(x), g(x)$ de û rasteka x li derdora tewareya XX' bibîne.

a) $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, g(x) = \mathrm{e}\,, x = 0$ b) $f(x) = \sqrt{x-4}, g(x) = 1\,, x = 8$



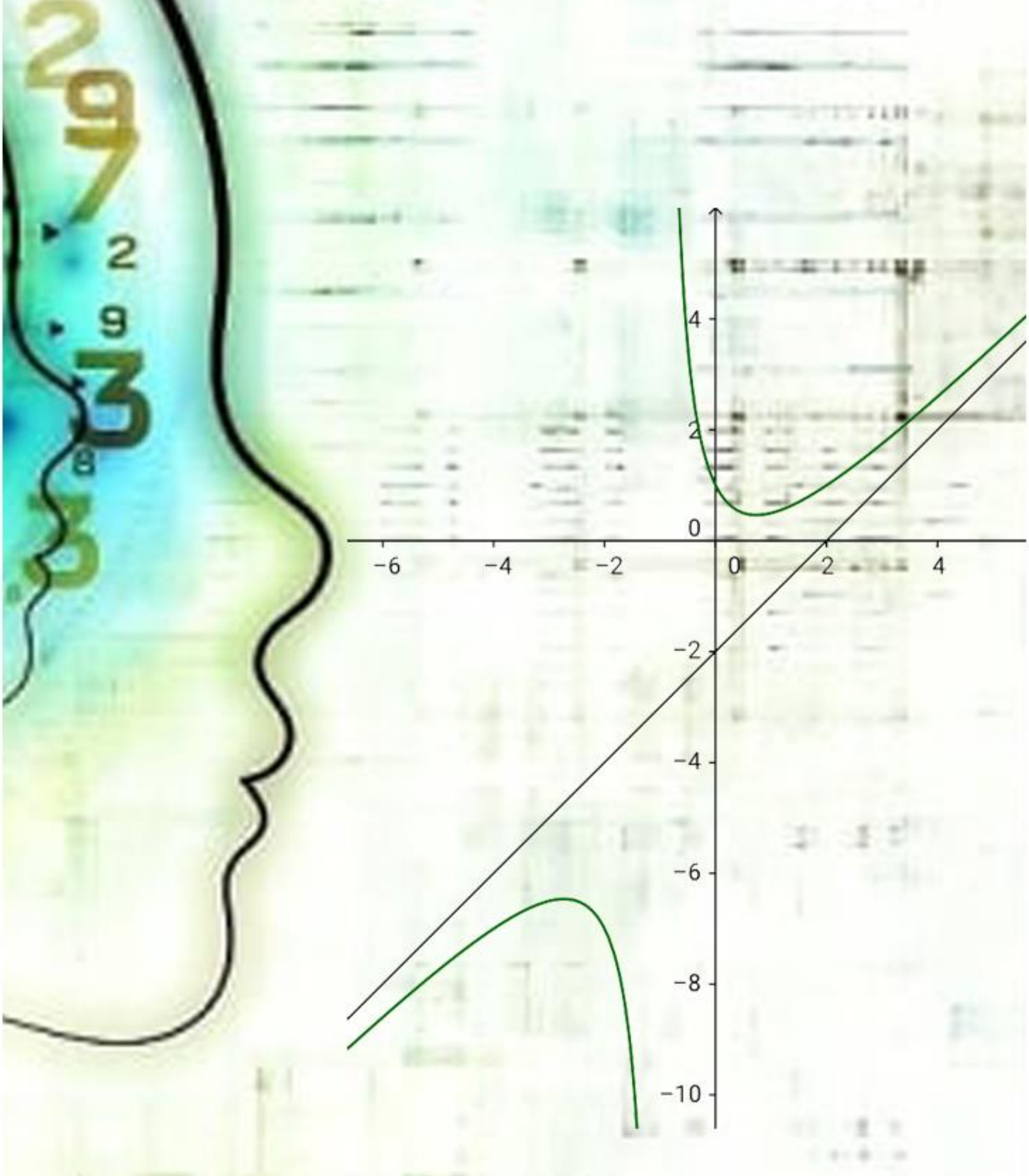
(a)

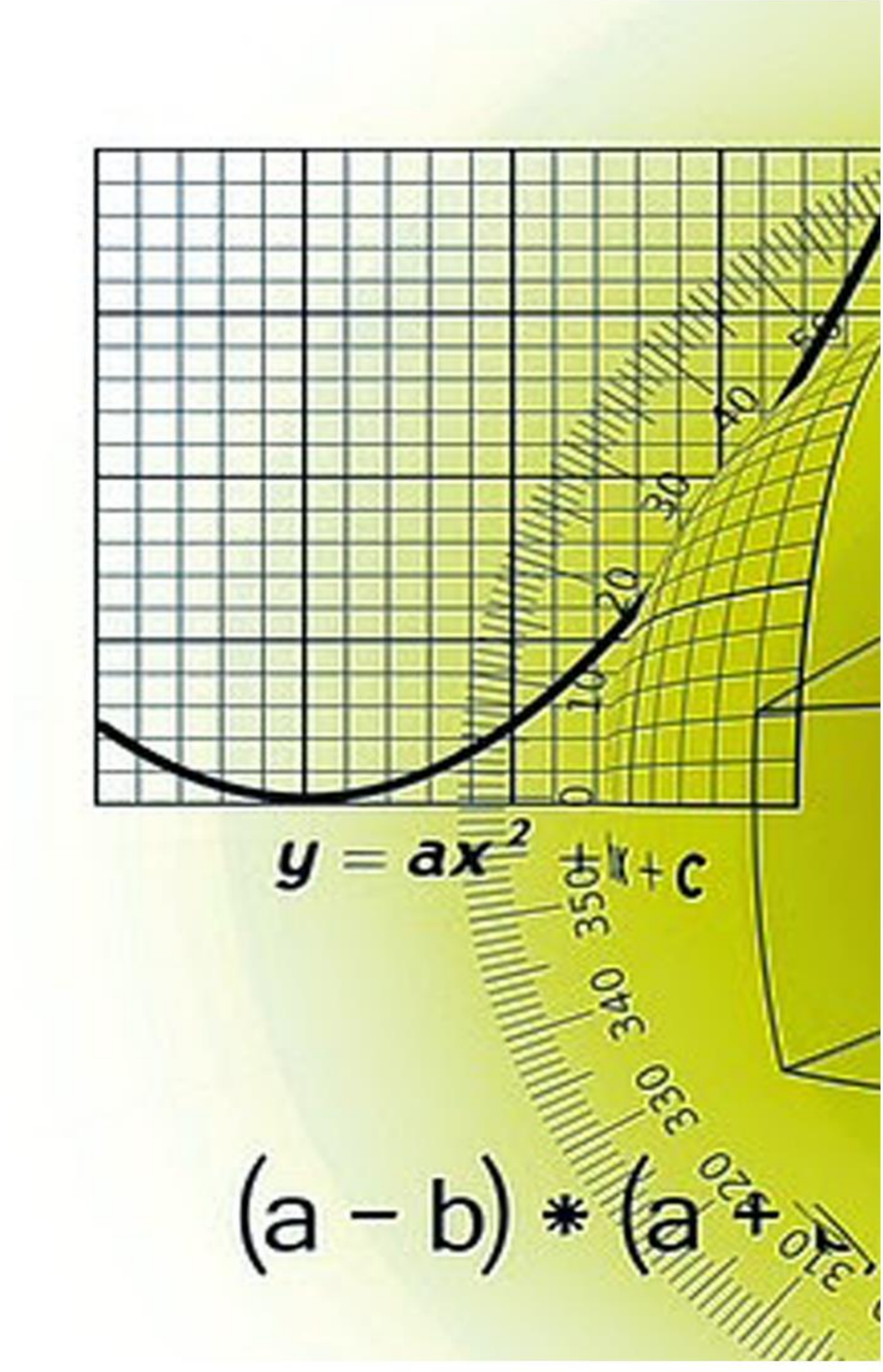
(b)

BEŞA ÇAREM

FONKSIYONÊN HEJMARÎ Û XÊZKIRINA GIRAFÎKÊN WAN

1) Rastekên nêzîker
2) Xêzkirina girafîkên hin fonksiyonan




$y = ax^2$
$(a - b) * (a +$

RASTEKÊN NÊZÎKER

Rasteka nêzîker ya rastî yek ji tewareyan

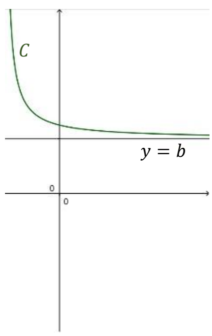
1) Rasteka nêzîker ya rastî tewareya XX'

Eger di $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ be.

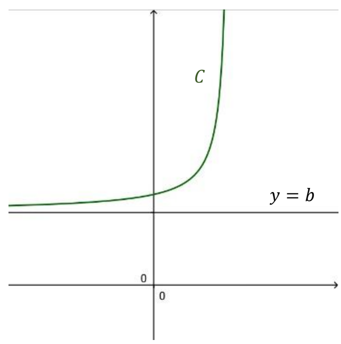
Eger $\boldsymbol{\Delta}: \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ rastekek be, û eger $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ be, li gorî vê, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ nêzîkera rastî $\boldsymbol{XX'}$ e.

Ji bo dîtina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîker de:

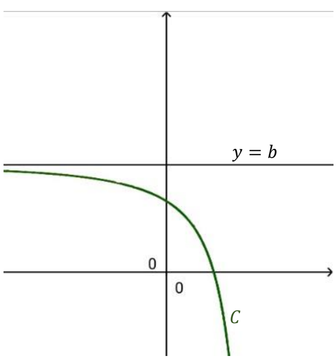
a) Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$ be, wê demê $\boldsymbol{C}$ li jorî nêzîker e.
b) Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}$ be, wê demê $\boldsymbol{C}$ li jêrî nêzîker e



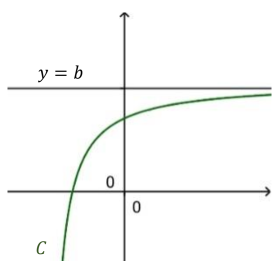
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = b$$



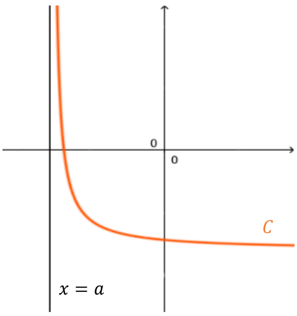
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = b$$

2) Rasteka nêzîker ya rastî tewareya YY'

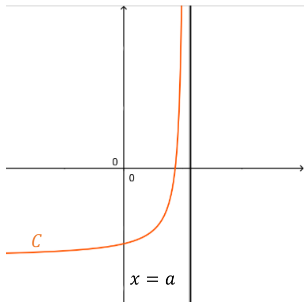
Eger di $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R}$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ be.

Eger $\boldsymbol{\Delta} :\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ rastekek be, û eger $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ be, li gorî vê, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ nêzîkera rastî $\boldsymbol{XX'}$ e.

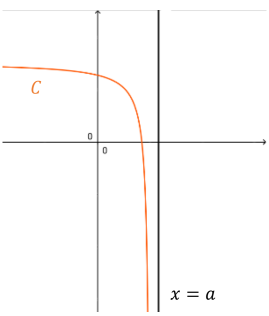
Ji bo dîtina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîker de:



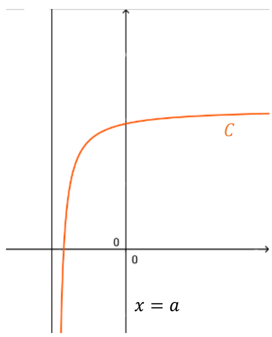
$$\lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = -\infty$$



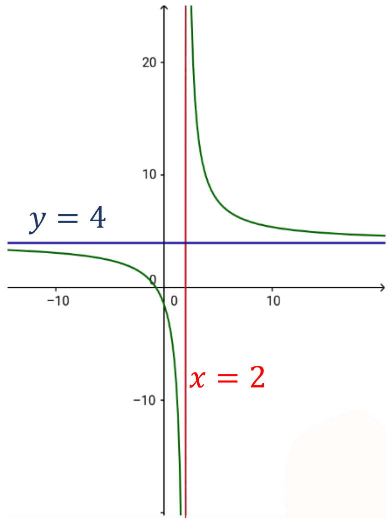
$$\lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = -\infty$$

Mînak:

Eger C girafîka fonksiyona $f(x)$; $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$ be.

1) Komika andamên f û domdariya wê bibîne, piştre nêzîkerên girafîka C yên rastî tewareya XX' û YY' bibîne.
2) rewşa di navbera C û her du nêzîkerên wê de zelal bike.

Çareserî:



1) $D = \mathbb{R}/\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

f domdariya di her du navberên $]-\infty, 2[,]2, +\infty[$ de ye û divê em dawiyên rex keviyên navberên berdwam bibînin.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4 \Rightarrow \mathrm{y} = 4$ Rasteka nêzîker ya rastî tewareya XX' dema ku x cîranê $+\infty$ be ye.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4 \Rightarrow \mathrm{y} = 4$ Rasteka nêzîker ya rastî tewareya XX dema ku x cîranê$-\infty$ be ye.

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê rastê yê nêzîker.

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 2$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê rastê yê nêzîker.

2) $f(x) - y = \frac{4x+3}{x-2} - 4 = \frac{11}{x-2}$

di navbera $]-\infty, 2[$ de $f(x) - y < 0 \implies C$ li jêrî nêzîker e.

di navbera$]2, +\infty[$ de $f(x) - y > 0 \implies C$ li jorî nêzîker e.

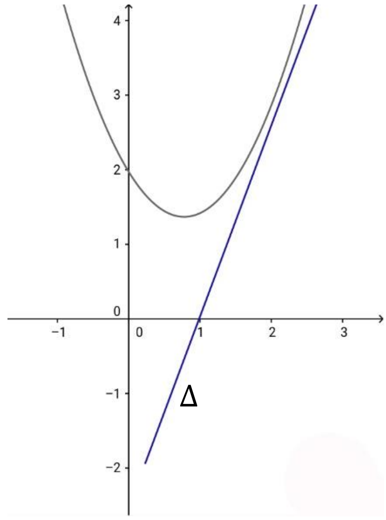
Nêzîkera xwar

Eger $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f(x)}$ be,

$\boldsymbol{\Delta : y = mx + p}$ rastekek be

û $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to \pm\infty}} \boldsymbol{(f(x) - y) = 0}$ be,

wê demê **Δ nêzîkera** $\boldsymbol{C}$ ye.



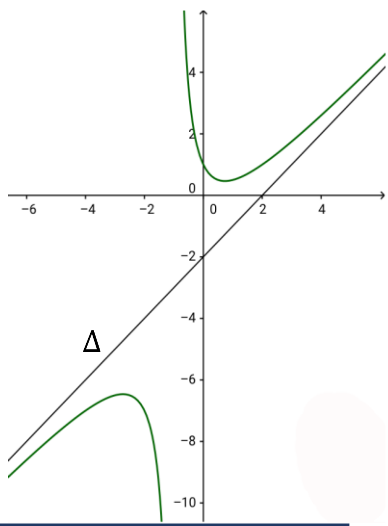
Mînak 1:

Eger C girafîka fonksiyona $f(x)$be:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$$

1) Tekez bike ku rasteka $\Delta : y = x - 2$ li rex $\pm\infty$ nêzîkera C ye.
2) rewşa di navbera C û rasteka Δ de zelal bike.

Çareserî:



1) Eger $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - y) = 0$ wê demê, rasteka Δ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye.
$f(x) - y_\Delta = \frac{x^2-x+1}{x+1} - (x - 2) = \frac{3}{x+1}$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{3}{x+1}\right) = 0$
Tê dîtin ku rasteka Δ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye li rex $\pm\infty$.
2) Ji bo zelalkirina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka Δ de, em hêmaya $f(x) - y_\Delta$ bibînin, ew jî hêmaya paranê ye.

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$\boldsymbol{f(x) - y_\Delta}$	$-$	$+$
rewş	C li jêrî Δ ye	C li jorî Δ ye

Mînak 2:

Eger C girafîka fonksiyona $f(x)$ be: $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$
Tekez bike ku rasteka $\Delta :\ y = -2x$ li rex $-\infty$ nêzîkera C ye.
Çareserî:
Eger $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0$ wê demê, rasteka Δ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye.
$f(x) - y_\Delta = -x + \sqrt{x^2 + 8} - (-2x) = \sqrt{x^2 + 8} + x$ li gorî vê

$$f(x) - y_\Delta = \frac{\left(\sqrt{x^2 + 8} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + 8} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 8} - x\right)} = \frac{8}{\left(\sqrt{x^2 + 8} - x\right)}$$

wê demê

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y) = 0$$

Tê dîtin ku rasteka Δ li rex $-\infty$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye.

Hînkirin:

1) Eger C girafîka fonksiyona $f(x)$ be: $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

a) Tekez bike ku $f(x)$ bi vî awayî $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$ tê nivîsanindin.

b) Tekez bike ku rasteka $\Delta: y_\Delta = \boldsymbol{x - 1}$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û piştre rewşa di navbera C û rasteka Δ de zelal bike.

2) Eger C girafîka fonksiyona $f(x)$ be: $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4$

tekez bike ku rasteka $\Delta: y_\Delta = \boldsymbol{x - 4}$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û piştre rewşa di navbera C û rasteka Δ de zelal bike.

3) Li gorî rewşên li jêr, tekez bike ku y_Δ li rex $+\infty$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye. yan $-\infty$ û rewşa di nevbera C û nêzîkera wê Δ de zelal bike.

a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+1}$, $y_\Delta = x - 3$

b) $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x+3}$, $y_\Delta = 2x - 1$

c) $f(x) = x - \ln(1 + \frac{1}{x})$, $y_\Delta = x$

d) $f(x) = 6 - 4x - \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$, $y_\Delta = 6 - 4x$

e) $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $y_\Delta = x + 1$ li rex $+\infty$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9} - x, y_\Delta = -2x$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, y_\Delta = x$ li rex $+\infty$

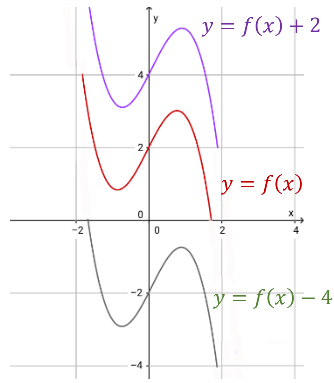
XÊZKIRINA GIRAFÎKÊN HIN FONKSIYONAN

Bi sûdgirtina ji hin agahiyên wek rastekên nêzîker, hevbirîna bi tewareyan re û taybetiyên hemaliyê, em dikarin girafîkên hin fonksiyonan xêz bikin.

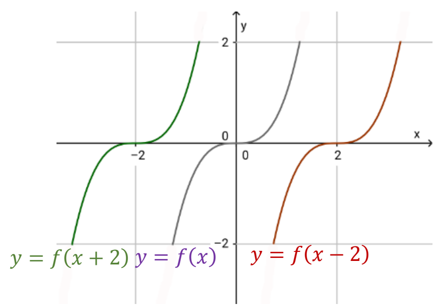
Em dikarin girafîka fonksiyonekê li gorî girafîka fonksiyoneke xêzkirî bi sûdgirtina ji guherînên naskirî, bibînin.

Hin rewşên guherînên girafîkan

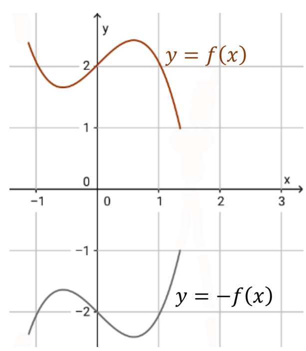
1) Em dikarin bi pêkanîna kişandina $\vec{v}(0, b)$ li ser girafîka fonksiyona f, girafîka fonksiyona $f_1(x) = f(x) + b$ bibînin, li gorî awayê li kêlekê.



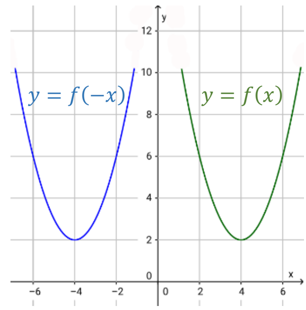
2) Em dikarin bi pêkanîna kişandina $\vec{v}(-a, 0)$ li ser girafîka fonksiyona f, girafîka fonksiyona $f_2(x) = f(x + a)$ bibînin, li gorî awayê li kêlekê.



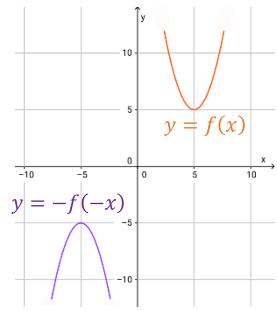
3) Em dikarin bi dîtina hemaliyê girafîka fonksiyona f li gorî tewareya XX', girafîka fonksiyona $f_3(x) = -f(x)$ bibînin, li gorî awayê li kêlekê.



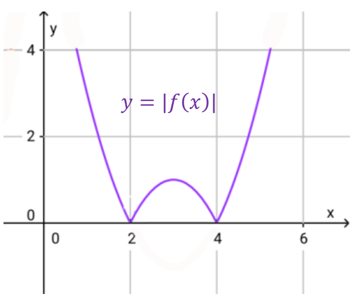
4) Em dikarin bi dîtina hemaliyê girafîka fonksiyona f li gorî tewareya YY', girafîka fonksiyona $f_4(x) = f(-x)$ bibînin, li gorî awayê li kêlekê.

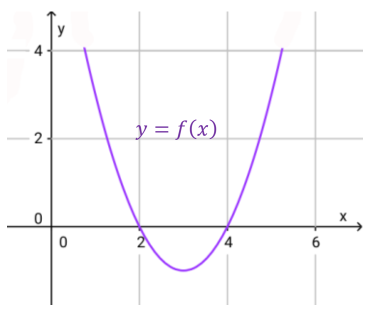


5) Em dikarin bi dîtina hemaliyê girafîka fonksiyona f li gorî navenda kordînatê, girafîka fonksiyona $f_5(x) = -f(-x)$ bibînin, li gorî awayê li kêlekê.



6) $f_6(x) = |f(x)|$ di navbera ku xalên wê li ser YY' pozîtîf bin wê demê C_1 li ser C ye û di navbera ku xalên wê li ser YY' negetîf bin wê demê C_1 hemaliyê C ye li gorî XX' e.





Bi sûdgirtina ji guherînên fonksiyonan, rastekên nêzîker, hevbirîna bi tewareyan re, taybetmendiyên hemaliyê (kit, cot …) û hin agahiyên din yên ji girêftariyan tên girtin, em ê fêrî xêzkirina girafîkên fonksiyonan bibin.

Mînak 1:

Eger di $\mathbb{R}^*$ de $\boldsymbol{C}$ girafika fonkisiona $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ be.

1) Tekez bike ku rasteka $\Delta:\ y=x$ li rex $\pm\infty$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka $\boldsymbol{\Delta}$ de zelal bike.
2) Nêzîkerên girafika $\boldsymbol{C}$ yên bi tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û $\boldsymbol{YY'}$ re rastênhev eger hebin bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.
3) Tekez bike ku $\boldsymbol{f}$ fonkisioneke kit e.
4) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike.
5) Girafîka $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkeran xêz bike.
6) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rasteka $\boldsymbol{x=3}$ de bibîne.

Çareserî:

1) $\boldsymbol{f}$ domdar e di her du navberên $]-\infty,0[$, û $]0,+\infty[$ de.

$\boldsymbol{f(x)}=\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x}}-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}}\Longrightarrow f(x)-y_\Delta=-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y)=0\Longrightarrow$ rasteka Δ nêzîkera C li rex $+\infty$ ye.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0\Longrightarrow$ rasteka Δ nêzîkera C li rex $-\infty$ ye.

Ji bo zelalkirina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka $\boldsymbol{\Delta}$ de, em hêmaya $f(x)-y_\Delta$ bibînin, ew jî hêmaya paranê ye.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f(x)-y_\Delta$	$+$	$-$
rewş	$\boldsymbol{C}$ li jorî Δ ye	$\boldsymbol{C}$ li jêrî Δ ye

2) $\boldsymbol{f}$ domdar e de her du navberên $]-\infty,0[$ û $]0,+\infty[$ de.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê çepê yê nêzîker.

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê rastê yê nêzîker.

3) Eger her du mercên li jêr pêk werin; wê demê $\boldsymbol{f}$ kit e,

a) Eger $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ wê demê, $-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$

b) Eger $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ wê demê, $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \frac{(-x^2)-4}{(-x)} = -\left(\frac{x^2-4}{x}\right) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ li gorî vê; $\boldsymbol{f}$ kit e û

Girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ li gorî navenda kordînatê hemalî ye.

4) Fonksiyon domdar e û di navbera $]-\infty, 0[$ û $]0, +\infty[$ de tê daraştin.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

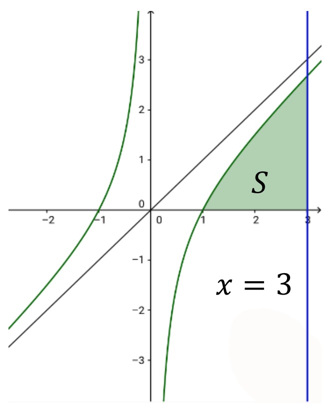
$f'(x) = \frac{x^2+4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$

Li gorî vê, hêmaya $f'(x) > 0 \ : x \in \mathbb{R}^*$.

Em tabloya guherîna fonksiyonê xêz bikin.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$	$+$		$+$
Guherîna $f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

5) ji bo xêzkirinê, xalên alîkar hene; hevbirîna bi XX' re tê wateya ku $f(x) = 0$ li gorî vê, $x_1 = 1, x_2 = -1$, xalên hevbirînê $(1,0)$ û $(-1,0)$



6) $\boldsymbol{S} = \int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{dx} = \int_1^3 \left(\boldsymbol{x} - \frac{4}{\boldsymbol{x}}\right).\boldsymbol{dx}$

$= \left[\frac{x^2}{2} - 4\ln x\right]_1^3$

$= \left[\frac{9}{2} - 4\ln 3\right] - \left[\frac{1}{2} - 4\ln 1\right]$

$= 4 - 4\ln(3)$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiona $f(x) = \frac{3x+3}{2x+4} : x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ be.

1) Nêzîkerên girafika $\boldsymbol{C}$ yên bi tewareya XX' û YY' re rastênhev eger hebin bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.

2) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloya wê xêz bike.

3) $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê xêz bike.

4) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û her du tewareyên kordînatê de bibîne.

Çareserî:

1) f di her du navberên $]-\infty, -2[$ û $]-2, +\infty[$ de domdar û daraştî ye.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2} \Longrightarrow \mathbf{y} = \frac{3}{2}$ nêzîker rastî tewareya XX' li rex $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2} \Longrightarrow \mathbf{y} = \frac{3}{2}$ nêzîker rastî tewareya XX' li rex $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to-2}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê çepê yê nêzîker.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to-2}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye û $\boldsymbol{C}$ dikeve aliyê rastê yê nêzîker.

Ji bo zelalkirina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka $\mathbf{y} = \frac{3}{2}$ de, em hêmaya $f(x) - y$ bibînin, ew jî hêmaya paranê ye.

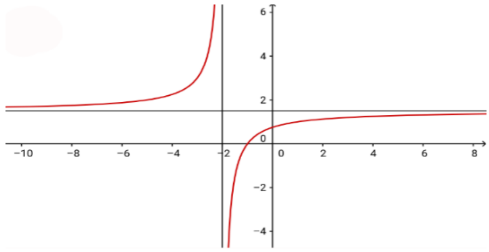
$f(x) - y = \frac{3x+3}{2x+4} - \frac{3}{2} = \frac{-3}{2x+4}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$		$-$
rewş	C li jorî y ye		C li jêrî y ye

2) $f'(x) = \frac{6}{(2x+4)^2} > 0$ Li gorî vê, hêmaya $f'(x) > 0$

x	-∞	-2	$+\infty$
Hêmaya $f'(x)$	+		+
Guherîna $f(x)$	$\frac{3}{2} \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow \frac{3}{2}$

3) ji bo xêzkirinê, xalên alîkar hene; hevbirîna bi XX' re tê wateya ku $f(x)=0$ li gorî vê, $x=-1$, xala hevbirînê $(-1,0)$ hevbirîna bi YY' re tê wateya ku $x=0$ ligorî vê, $f(0)=\frac{3}{4}$, xala hevbirînê $(0,\frac{3}{4})$



4) $S=\int_a^b f(x).dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2x+4}\right).dx$

$$=\left[\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\ln(2x+4)\right]_0^1=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 2$$

Mînak 3:

Eger di $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $f(x)=(x-2)e^x$ be.

1) Guherîna fonksiyona $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de bibîne, tabloya wê xêz bike û nirxê mezin ê herêmî bibîne.
2) $\boldsymbol{C}$ xêz bike û $\boldsymbol{C_1}$ girafîka f_1: $f_1(x)=xe^{x+2}$ xêz bike.
3) Ruberê di navbera $\boldsymbol{C}$ û her du tewareyên $\boldsymbol{XX'}, \boldsymbol{YY'}$ bibîne.
4) Hecmê ji encama zivirandina $\boldsymbol{C}$ li derdora tewareya XX' û her du rastekên $x=0, x=2$ pêk tê, bibîne.

Çareserî:

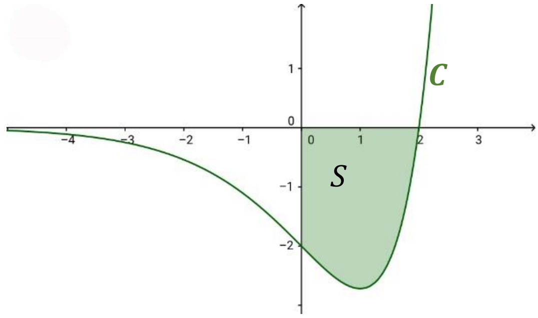
1) $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştî ye.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $y=0$ nêzîkera li ser XX' e li rex $+\infty$ ye.

$f'(x)=(x+1)e^x$ dema ku $f'(x)=0$ wê demê $x=1$ û $f(1)=e$

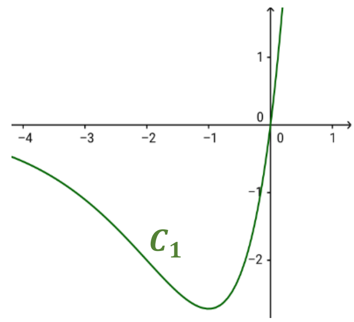
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0 ↘	e	↗ $+\infty$

2) Ji bo xêzkirina $\boldsymbol{C}$, xalên alîkar hene; hevbirîna bi XX' re tê wateya ku $f(x) = 0$ li gorî vê, $x = 2$, xala hevbirînê $(2, 0)$ e. Hevbirîna bi YY' re tê wateya ku $x = 0$ li gorî vê, $f(0) = -2$, xala hevbirînê $(0, -2)$ ye.



Ji bo xêzkirina $\boldsymbol{C_1}$, destpêkê em f_1 bibînin:

$$f(x+2) = (x-2+2)e^{x+2}$$
$$= xe^{x+2} = f_1(x) \Leftrightarrow$$
$$f_1(x) = f(x+2)$$



3) $S = \int_a^b -f(x).dx = \int_0^2 -(x-2)e^x \, .dx$

Eger $u = -x + 2 \Rightarrow u' = -1$, $v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\boldsymbol{S} = [(-x+2)e^x]_0^2 - \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} -e^x \; dx$

$= [(-x+2)e^x]_0^2 + [e^x]_0^2 = e^2 - 3$

4) $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^2 (x-2)^2 e^{2x} \; dx$

eger $u = (x-2)^2 \;\Rightarrow u' = 2(x-2)$

$v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$ wê demê:

$\int u.v' \, dx = u.v - \int v.u' \, dx$

$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{2}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2})^{\boldsymbol{2}} e^{2x} \; dx = \frac{1}{2}(x-2)^2 e^{2x} - \int (x-2)e^{2x} \, dx$

Ji bo dîtina $\int (x-2)e^{2x} \, dx$ em integrala bi parçeyan li aliyê rastê careke din bi kar bînin.

Eger $u = x - 2 \;\Rightarrow u' = 1$ û $v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int (x-2)e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(x-2\,)e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}(x-2\,)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

wê demê:

$$\Rightarrow V = \pi[\tfrac{1}{2}(x-2)^2 e^{2x} - \tfrac{1}{2}(x-2\,)e^{2x} + \tfrac{1}{4}e^{2x}]_0^2 = \frac{e^4+13}{4}\pi$$

Mînak 4:

Eger di $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $f: f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ be.

1) Tekez bike ku $\boldsymbol{f}$ fonksiyoneke kit e.
2) Nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên bi tewareya XX' re rastênhev eger hebin bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.
3) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike.
4) $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkeran xêz bike.
5) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$, tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rastekên $\boldsymbol{x = 0}, \boldsymbol{x} = \ln 2$ de bibîne.
6) C_1 girafîka $f_1: f_1(x) = \frac{|e^x-1|}{e^x+1}$ xêz bike.

Çareserî:

1) Ta ku f fonkisioneke kit be ,divê ev merc bik were:
$f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{(1-e^x)}{(1+e^x)} = -\frac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$$

li gorî vê, f kit e.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \quad \Longrightarrow \mathbf{y} = -1$ nêzîkera bi tewareya XX' re rastênhev e li rex $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ ne diyar e, em $f(x)$ bi vî awayî binivîsin

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{(1 - e^{-x})}{(1 + e^{-x})}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad \Longrightarrow \mathbf{y} = 1$ nêzîkera bi tewareya XX' re rastênhev e li rex $+\infty$

rewşa di navbera C û nêzîkerên wê de

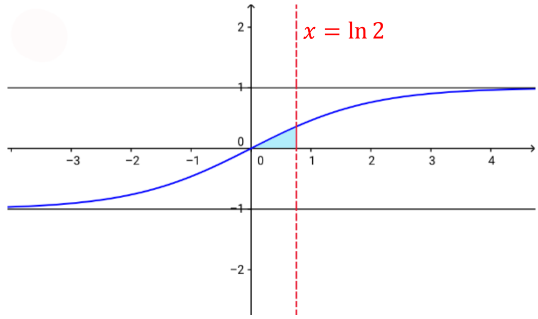
$f(x) - y_{\Delta_1} = \frac{e^x-1}{e^x+1} + 1 = \frac{2e^x}{e^x+1} > 0 \Longrightarrow$ C li jorî Δ_1 ye

$f(x) - y_{\Delta_2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 = \frac{-2}{e^x+1} < 0 \Longrightarrow$ C li jêrî Δ_2 ye

3) $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$

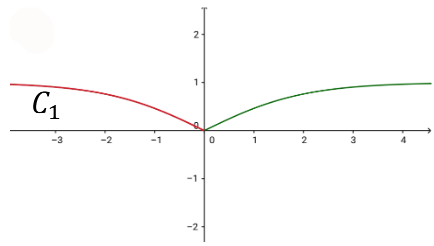
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	-1 $\nearrow$ 1

4) Ji bo xêzkirina $\boldsymbol{C}$, dema ku $x = 0$ li gorî vê, $f(0) = 0$, xala hevbirînê $(0, 0)$ e



5) $S = \int_a^b f(x).dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right).dx = \int_0^{\ln 2}\left(1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}\right).dx$

$[x + 2\ln(e^{-x} + 1)]_0^1 = \ln(\frac{9}{8})$



6) $f_1(x) = \frac{|e^x-1|}{e^x+1} = \left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| \Longrightarrow$ $f_1(x) = |f(x)|$ ji ber ku $e^x + 1 > 0$
Xalên ku li ser YY' û pozîtîf bin, wek xwe dimînin, xalên ku li bin YY' û negetîf bin; em hemaliyên wan xalan li gorî XX' dibin.

Mînak 5:

Eger di $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$ be.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bibîne.
2) Tekez bike ku $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ û $f(x)$ cot e.
3) Tekez bike ku $f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$ $(x \in \mathbb{R})$
  a) Tekez bike ku rasteka $\Delta : y = x$ li rex $+\infty$ nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye.
  b) Rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka Δ de zelal bike.
4) Tekez bike ku $f'(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ $(x \in \mathbb{R})$.
5) Guherîna fonksiyona $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de bibîne, tabloya wê xêz bike û nirxê mezin ê herêmî, bibîne.

Çareserî:

f di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştî ye.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = \ln(e^{2x}+1) - x = \ln(e^{2x}+1) - \ln(e^{x}) = \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}\right)$

$= \ln(\, e^{x} + \frac{1}{e^{x}}) = \ln(e^{x} + e^{-x})$

3) $f(x) - x = \ln(e^{2x}+1) - 2x = \ln(e^{2x}+1) - \ln(e^{2x})$

$= \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}\right) = \ln(\,1 + \frac{1}{e^{2x}})$

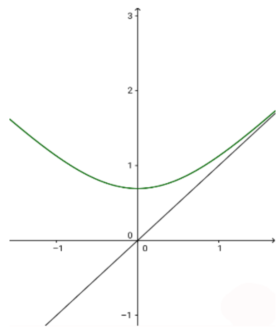
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\,1 + \frac{1}{e^{2x}}) = \mathbf{0} \Longrightarrow$

rasteka Δ li rex $+\infty$ nêzîkera C ye.

b) Ji bo zelalkirina rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û rasteka Δ de, em hêmaya $f(x) - y_{\Delta}$ bibînin, ew jî hêmaya paranê ye.

$f(x) - y_{\Delta} = \ln(\,1 + \frac{1}{e^{2x}}) > 0$ li gorî

wê C li jorî Δ ye.



4) $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1 = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad (x \in \mathbb{R})$

5) f di $\mathbb{R}$ de domdar e û daraştî ye.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty - \infty$ rewş nediyar e

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{x} + e^{-x}) = +\infty$

dma ku $f'(x) = 0$ be, wê demê $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \ln 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0 ↘	$\ln 2$	↗ $+\infty$

Hînkirin:

1) Eger $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ fonksiyonek be.

a) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike, nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên bi tewareya XX' rastênhev eger hebin, bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.

b) $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkeran xêz bike.

c) Eger $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}|\boldsymbol{x}|$ be, tekez bike ku $\boldsymbol{f}$ cot e, piştire li gorî $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C_g}$ xêz bike.

d) Li gorî nirxên λ çareseriyên hevkêşeya $(\lambda-2)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1=0$ ya girafîka f bibîne.

2) Eger di $[0,+\infty[$ de $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ be.

a) Guherîna fonksiyona $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de bibîne, tabloya wê xêz bike û nirxê mezin ê herêmî, bibîne.

b) $\boldsymbol{C}$ xêz bike û C_1 girafîka $f_1 \colon f_1(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}$ xêz bike.

c) Ruberê di navbera $\boldsymbol{C}$ û her du tewareyên $\boldsymbol{XX'}, \boldsymbol{YY'}$ de bibîne.

d) Hecmê ji encama zivirandina $\boldsymbol{C}$ li derdora tewareya XX' û her du rastekên $x=1, x=2$ pêk tê, bibîne.

PIRSÊN BEŞA ÇAREM

1) Eger $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$ di $\mathbb{R}/\{-1\}$ de fonksiyonek be.

a) Tekez bike ku f bi awayî li jêr tê nivîsandin.

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}\ : a,b,c\in\mathbb{R}$

b) Nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên bi tewareya $\boldsymbol{yy'}$ re rastênhev eger hebin bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.

c) Tekez bike ku rasteka $\Delta: y=x+1$, nêzîkera $\boldsymbol{C}$ ye, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkera Δ de zelal bike.

d) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike, Nirxên mezin an yên biçûk yên xwecih yên fonksiyonê bibîne. piştre $f(\mathbb{R}/\{-1\})$ bibîne

e) $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkeran xêz bike.

f) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û $\Delta: y=x+1$ û rasteka $\boldsymbol{x=2, x=3}$ de bibîne.

2) Eger $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}: x\in\mathbb{R}/\{-1\}$ fonksiyonek be.

a) Tekez bike ku f fonksiyoneke kit e.

b) Nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên rastî tewareya XX' eger hebin bibîne, rewşa di navbera $\boldsymbol{C}$ û nêzîkerên wê de zelal bike.

c) Guherûna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike.

d) Hevkêşeya $\boldsymbol{T}$ pêveka $\boldsymbol{C}$ di xala $O(0,0)$ de bibîne.

e) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rasteka $\boldsymbol{x=-1, x=1}$ de bibîne.

3) Eger $g(x)=\frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}: x\in\mathbb{R}/\{0\}$ fonksiyonek be.

a) Dawiyên g bibîne û li gorî wê, nêzîkera C bibîne.

b) Hevkêşeya T pêveka C di xala $N(7,y)$ de bibîne.

c) Tekez bike ku $g(-x)+g(x)=2$ tu çi dibînî?

d) C xêz bike.

e) Eger $f(x)=g|x|$ be, tekez bike ku f cot e, piştire li gorî C, C_f xêz bike.

4) Eger $f(x)=e^x(x^2-2x)$ $(x\in\mathbb{R})$ fonksiyonek be.

a) Guherîna fonksiyona f bibîne.

b) Tekez bike ku du pêvekên C hene ku di navenda kordînatê re derbas dibin.

c) Hevkêşeya T pêveka C di xala $N(1,y)$ de bibîne.

d) C xêz bike.
e) Li gorî nirxên hejmara rast K, hejmar û hêmaya çareseriyên hevkêşeyê bibîne.

5) Eger $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ fonksiyonek be.

1. Tekez bike ku $f(x)$ bi van her du awayan tê nivîsandin.

$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+1}$, $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$

a) Dawiyên fonksiyonê li rex $\pm\infty$ bibîne.
b) Tekez bike ku her du rastekên $\Delta_1 : y = x + 1$, $\Delta_2 : y = x - 1$ nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ ne.
c) Rewşa her du rastekên Δ_1, Δ_2 li gorî C zelal bike.

2. f fonksiyoneke cot e yan jî kit e?
3. Guherîna fonksiyona f bibîne, tabloya wê xêz bike.
4. Tekez bike ku yek çareseriya hevkêşeya $x(e^x + 1) = e^x - 1$ heye, bibîne.
5. Δ_1 , Δ_2 û $\boldsymbol{C}$ xêz bike, rûberê di navbera $\boldsymbol{C}$, tewareya XX' û rasteka $x = 1$ de bibîne.

6) Eger $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$ di $]0, +\infty[$ de fonksiyonek be.

a) Guherîna fonksiyona f bibîne.
b) Eger $F(x) = \frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\ln x - \frac{2}{x}$ be, tekez bike ku F fonksiyona resen e ya fonksiyona $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$ e.
c) C xêz bike.
d) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rasteka $\boldsymbol{x = e, x = 1}$ de bibîne.
e) Hecmê ji encama zivirandina C li derdora tewareya XX' û her du rastekên $\boldsymbol{x = e, x = 1}$ pêk tê, bibîne.

7) Eger $f(x) = \ln(\frac{x}{1-x})$ fonksiyonek be.

a) D_f bibîne, her du nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên rastî tewareya XX', $\boldsymbol{YY'}$ eger hebin, bibîne,
b) Guherîna fonksiyona f bibîne.
c) $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkeran xêz bike.
d) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rasteka $\boldsymbol{x = 0, x = 1}$ de bibîne.

8) Eger $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ fonksiyonek be.

a) D_f bibîne, piştre dawiya f li rex $+\infty, -\infty$ bibîne.
b) Tekez bike ku $y = -x$ nêzîkera xwar yê $\boldsymbol{C}$ ye.
c) Guherîna fonksiyona f bibîne.

   d) $\boldsymbol{C}$ û Δ xêz bike.
   e) Eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}$ sê xal bin û $x_A = 0, x_B = 1, x_C = -1$، tekez bike ku Δ' pêveka $\boldsymbol{C}$ di xala A de rastî BD ye.

9) Eger $f(x) = \ln(\sqrt{x-1})$ fonksiyonek di $]1, +\infty[$ be.
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bibîne û nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên rastî tewareya $\boldsymbol{YY'}$ bibîne.
   b) Guherîna fonksiyona f bibîne.
   c) $\boldsymbol{C}$ xêz bike û piştre eger $f_1(x) = \ln(x-1)$ be, C_1 girafika fonksiyona f_1 xêz bike.
   d) Rûberê di navbera girafîka $\boldsymbol{f(x)}$ û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ û rasteka $\boldsymbol{x = e}$ de bibîne.

10) Eger $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x})^2$ di $\mathbb{R}/\{0,1\}$ de fonksiyonek be.
   a) her nêzîkerên $\boldsymbol{C}$ yên rastî tewareya XX', $\boldsymbol{YY'}$eger hebin bibîne.
   b) Guherîna fonksiyona f bibîne.
   c) $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkerên C xêz bike.
   d) Girafîka fonksiyona f_1 xêz bike; $f_1(x) = 2\ln(\frac{x-1}{x})$
   e) Girafîka fonksiyona f_2 xêz bike; $f_2(x) = 2\ln(\frac{-x+1}{x})$
   f) Girafîka fonksiyona f_3 xêz bike; $f_3(x) = 2[\ln(x-1) - \ln(x)]$

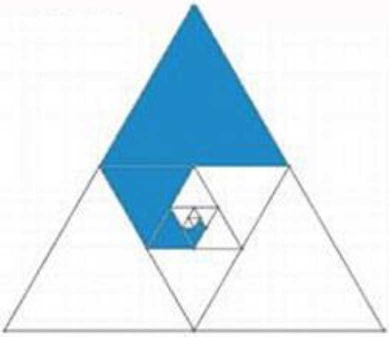
11) Eger $f(x) = \ln(ax+b) : D \subseteq \mathbb{R}$ û C girafîka fonksiyona f be.
   a) Eger bê zanîn ku $x = \frac{1}{2}$ nêzîkera C ye, dema ku $x \to \frac{1}{2}$ û $\boldsymbol{C}$ tewareya XX' di xala $A(1,0)$ bibire, a û b bibîne.
   b) Ji bo $a = 2,\ b = -1$ wê demê wê: $f(x) = \ln(2x-1)$ be. $\boldsymbol{C}$ û her du nêzîkerên wê xêz bike.
   c) Girafîka fonksiyona $f_1(x) = |\ln(2x-1)|$ xêz bike.
   d) tekez bike ku F: $F(x) = \frac{1}{2}[(2x-1)\ln(2x-1) - 2x]$ li gorî ku: $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ fonksiyona resen ya f ye.
   e) Rûberê di navbera C û tewareya XX' û rasteka $x = 2$ de bibîne.

12) Eger $f(x) = 2x - \frac{e^x}{e^x - 1}$ di $\mathbb{R}/\{0\}$ de fonksiyonek be.
   a) Guherîna fonksiyonê bibîne û tabloyê xêz bike.
   b) Tekez bike ku $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{2}})$ navenda hemalî ya $\boldsymbol{C}$ ye.
   c) Tekez bike ku $\boldsymbol{y = 2x}$ nêzîkera xwar yê $\boldsymbol{C}$ ye.
   d) $\boldsymbol{C}$ xêz bike.

BEŞA PÊNCEM

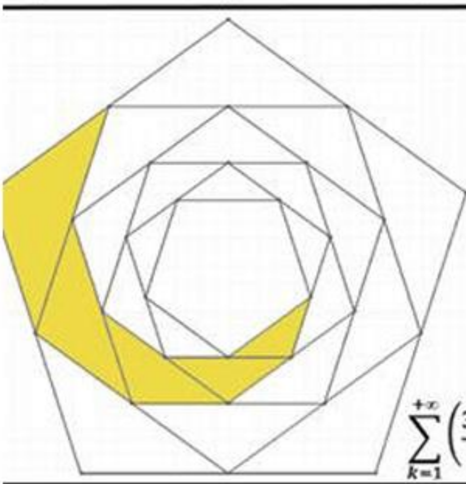
PEYHATÎ Û DAWIYÊN WÊ

1) Peyhatî
2) Tekezkirina gav bi gav
3) Dawiya peyhatiyê
4) Teoriyên dawiyan



$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$



$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^k = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{5-2}$$

PEYHATÎ

Peyhatî fonksiyona ku komika pênasên wê $\mathbb{N}$ ye yan jî her binkomika bê dawî $I \subset \mathbb{N}$ ye, bi awayê $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$; $n_0 \in \mathbb{N}$ ye. sembola peyhatiyê $(u_n)_{n\geq 0}$ e, u_n pêkhateya peyhatiyê bi nîşana n ye.

Têbînî:

Hejmara pêkhateyên peyhatiyê bê dawî ne.

Mînak:

- $u_n = (-1)^n$ peyhatiyeke nirxên pêkhateyên wê tenê -1 û $+1$ in.
- $(2n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke ku $n_0 = 0$ e.
- $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ peyhatiyeke ku $n_0 = 1$ e.

Pênaseya peyhatiyê

1) Awayê rasterast ji pêkhateya bi nîşana n

Dîtina pêkhateya giştî bi alîkariya n wek $u_n = \frac{4}{n-1}$. yan

$u_n = f(n)$: f fonksiyoneke di $\mathbb{N}$ de ye wek $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

2) Forma vegerok

Peyhatiyeke ku pêkhateya wê ya giştî li gorî pêkhateyên berî wê yan hin ji wan, tê dayîn. Ji pêkhateya giştî re **forma vegerok** a peyhatiyê tê gotin.

Mînak 1:

Eger $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ peyhatiyeke vegerok be, pêkhateya destpêkê $\boldsymbol{u_0 = 1}$ û forma vegerok $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 3}$ be, em dikarin her pêkhateyekê li gorî pêkhateya berî wê bibînin.

$u_1 = u_0 + 3 = 4$

$u_2 = u_1 + 3 = 7$

$u_3 = u_2 + 3 = 10 \ ...$

Li gorî vê mînakê, em dikarin pêkhateya $\boldsymbol{u_{n+1}}$ li gorî pêkhateya u_n ya berî wê bibînin. $\boldsymbol{u_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_n})$ û fonksiyon f bi vî awayi tê nivîsandin $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{3}$

Peyhatiya zêdeker, tam zêdeker, kêmker, tam kêmker û ya neguhêr

(u_n)	Zêdeker	Eger $n \in D$ wê demê $u_{n+1} \geq u_n$
(u_n)	Tam zêdeker	Eger $n \in D$ wê demê $u_{n+1} > u_n$
(u_n)	Kêmker	Eger $n \in D$ wê demê $u_{n+1} \leq u_n$
(u_n)	Tam kêmker	Eger $n \in D$ wê demê $u_{n+1} < u_n$
(u_n)	Neguhêr	Eger $n \in D$ wê demê $u_{n+1} = u_n$

Dîtina tevgera peyhatiyekê bi karanîna yek ji yên li jêr:

a) Em hêmaya $\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}$ bibînin.
b) Hevrûkirina rêjeya $\frac{\boldsymbol{u_{n+1}}}{\boldsymbol{u_n}}$ bi hejmara (1) re, lê divê pêkhateyên peyhatiyê tam pozîtîf bin.
c) Dîtina tevgera fonksiyona $\boldsymbol{f}$, lê divê fonksiyon bi vî awayî be: $u_n = f(n)$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{2n} - \boldsymbol{1}$ pêkhateya giştî ya peyhatiyekê be.

Ev peyhatî, zêdeker an kêmker e?

Çareserî:

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1) = 2 > 0$$

Li gorî vê, $a_{n+1} > a_n$, peyhatî tam zêdeker e,

Mînak 2:

Eger $a_n = \frac{1}{2^n}$ peyhatiyek be

Ev peyhatî, zêdeker a yan kêmker e?

Çareserî:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2}$$

Lê $\frac{1}{2} < 1$, li gorî vê peyhatî tam kêmker e.

Mînak 3:

Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be li gorî ku $a_n = (n-1)^2 \ : \quad n \geq 0$

Ev peyhatî, zêdeker e yan kêmker e?

Çareserî:

Em peyhatiyê bi fonksiyona $f(x) = (x-1)^2$ nîşan bikin, li gorî vê:

$f'(x) = 2(x-1)$, lê $f'(x) > 0$ dema ku x >1 be, li gorî vê:

$\boldsymbol{f}$ di navbera $[1, +\infty[$ de tam zêdeker e, û peyhatiya $(a_n)_{n\geq 0}$ ji pêkhateya $a_0 = 1$ ve, tam zêdeker e.

Peyhatiya hejmarî

Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama komkirina pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê, jê re **peyhatiya hejmarî** tê gotin.

Mînak: (2, 5, 8, 11, 14, …) $d = 3$

$a_{n+1} - a_n = d$ yan $a_{n+1} = a_n + d$

Pêkhateya giştî ya peyhatiya hejmarî

Eger $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a}$ pêkhateya yekem be û $\boldsymbol{a_n}$ pêkhateya giştî be, wê demê;

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d \ : n \in \mathbb{N}^*}$$

Bi giştî eger $\boldsymbol{n, p} \in \mathbb{N}^*$ bin, wê demê;

$$\boldsymbol{a_n = a_p + (n-p)d}$$

Komkirina pêkhateyên peyhatiya hejmarî

Forma giştî Ji bo komkirina n pêkhate ya **peyhatiya hejmarî:**

$s_n = 2a + (n-1)d$ Yan $s_n = \frac{n}{2}(a+l)$

Bi awayekî taybet: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(a+l)}{2}$

Peyhatiya geometrî

Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama hevdana pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê, jê re **peyhatiya geometrî** tê gotin.

Mînak: (1, 3, 9, 27, 81, …)

Eger $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyeke geometrî be ku bingeha wê $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ û pêkhateya wê ya yekem $\boldsymbol{a}$ be, li gorî wê, pêkhateya giştî:
$a_n = a.r^{n-1}$

Li eger pêkhateya wê ya yekem $\boldsymbol{a_p}$ be, wê demê pêkhateya giştî; $a_n = a_p.r^{n-p}$

- Eger $\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{r}| < \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **tam kêmker** e.
- Eger $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **neguhêr** e.
- Eger $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **tam zêdeker** e.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

Eger $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ wê demê, $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{na}$

Bi awayekî taybet:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

Têbînî:

ji bo dîtina wekheviya li jêr:

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$

Em $r = \frac{a}{x}$ di (1) bi cih bikin:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \qquad (1)$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2}^{2} + \cdots + \frac{a}{x^{n-1}}^{n-1} = \frac{x^n - a^n}{x^{n-1}(x-a)} \qquad (2)$$

Û her du aliyên (2) hevdanî $x^{n-1}(x-a)$ bikin, encam dibe

$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$

Hînkirin:

1) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be li gorî ku $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$; $n \in \mathbb{N}$, tekez bike ku ev peyhatî geometrî ye û bingeha wê bibîne.

2) Pirsên li jêr bibersivîne.

a) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke hejmarî be; $a_2 = 41$ û $a_5 = -13$, a_{20} bibîne.

b) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometrî be; $a_7 = \frac{1}{1080}$ û $a_{10} = \frac{25}{2197}$, a_{30} bibîne.

c) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke hejmarî be, bingeha wê 3 û $a_1 = -2$ be. Nirxê a_n li gorî n û encama komkirina $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ bi $a_{30} + a_{31} + a_{32}$ re bibîne.

d) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometrî be, bingeha wê 3 û $a_1 = -2$ be. Nirxê a_n li gorî n û encama komkirina $a_1 + a_2 + \cdots + a_7$ bi $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$ re bibîne.

e) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke hejmarî be, bingeha wê -2 û $a_0 = -3$ be. Encama $a_{25} + a_{26} + \cdots + a_{125}$ bibîne.

f) Eger $(a_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometrî be, bingeha wê 2 û $a_0 = 1$ be. Encama $a_3 + a_4 + \cdots + a_{10}$ bibîne.

g) Encama $S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \cdots + 10$ bibîne.

h) Eger c, b, d sê pêkhateyên li pey hev yên peyhatiyeke geometrî bin, li gorî ku $c.b.d = 343$ û $c + b + d = 36.75$ nirxên c, b, d bibîne.

3) Guherîna peyhatiyên li jêr bibîne.

a) $a_n = \frac{3}{n^2}$ **b)** $a_n = \sqrt{3n+1}$

c) $a_n = \frac{2n-1}{n+4}$ **d)** $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

e) $a_n = \frac{3n+1}{n-2}$ **f)** $a_n = \frac{n}{10^n}$

g) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases}$

TEKEZKIRINA GAV BI GAV

Awayekî tekezkirina raveyên bîrkarî yên girêdayî hejmarên xwezayî ye.

Ji bo tekezkirina rastiya raveyeke bîrkarî li gorî ku $n \in \mathbb{N}$:

1) Em destpêkê tekez bikin ku $n = 1$
2) Rastbûna raveyê li gorî hejmara xwezayî k were erêkirin.
3) Em tekez bikin ku li gorî hejmara xwezayî $k+1$ rave rast e.

Minak:

Eger $n \in \mathbb{N}$ be, Tekez bike ku: $1 + 2^2 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Çareserî:

1) Eger $\mathrm{n} = 1$ be, wê demê $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$
   li gorî vê; ji bo $n = 1$, $E_{(1)}$ rast e
2) eger $1 + 2^2 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$: $k \in \mathbb{N}$ rast be.
3) Em tekez bikin ku dema ku $n = k+1$, $E_{(n)}$ rast e

$$
\begin{aligned}
1 + 2^2 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= 1 + 2^2 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}
$$

Wek tê dîtin $E_{(n+1)}$ rast e, li gorî vê; $E_{(n)}$ rast e

Hînkirin:

1) Eger $n \in \mathbb{N}$ be, tekez bike ku:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $: n \geq 1$

b) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ $: n \in \mathbb{N}$

c) $1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$

2) Eger $n! \geq 2^{n-1}$ newekheviyek be, tekez bike li gorî ku $n \in \mathbb{N}$ newekhevî rast e.

3) Eger $n \in \mathbb{N}$ be, tekez bike ku:

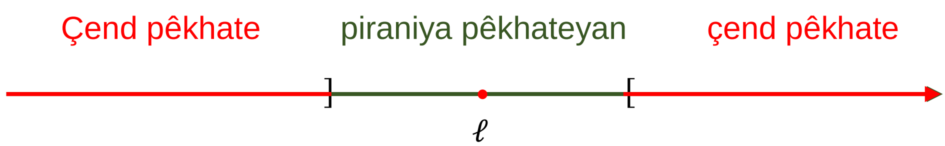
a) $4^n + 5$ qatjimara hejmara 3 ye.

b) $2^{3n} - 1$ qatjimara hejmara 7 e.

DAWIYA PEYHATIYÊ

1) Dawiya bi dawî

Eger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be, piraniya pêkhateyên wê (ji bilî çendan) di navbera vekirî de ya ku navenda wê ℓ ye be, wê demê em ji ℓ re dibêjin **dawiya peyhatiyê** ye û bi vî awayî tê nivîsandin: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$



Mînak:

Peyhatiyên li jêr bi dawî ne:

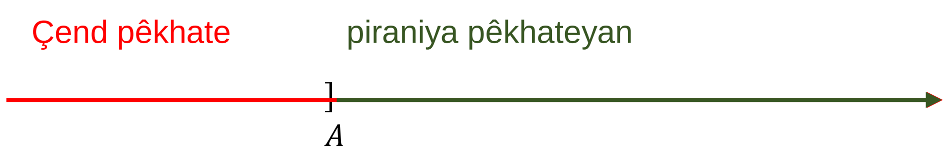
$u_n = \frac{1}{n^3}$, $u_n = \frac{1}{n^2}$, $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Dema ku n ber bi $+\infty$ ve diçe, peyhatî ber bi sifir ve diçe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

2) Dawiya bê dawî

Eger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be, piraniya pêkhateyên wê (ji bilî çendan) di navbera bi vî awayî $]A, +\infty[$ de be, wê demê em dibêjin peyhatî ber bi $+\infty$ ve diçe, û bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$



Mînak:

Peyhatiyên li jêr bê dawî ne:

$u_n = n^3$, $u_n = n^2$, $u_n = n$, $u_n = \sqrt{n}$

Û dema ku n ber bi $+\infty$ ve diçe, peyhatî ber bi $+\infty$ ve diçe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Eger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be, piraniya pêkhateyên wê (ji bilî çendan) di navbera bi vî awayî $]-\infty, A[$ de be, wê demê em dibêjin peyhatî ber bi $-\infty$ ve diçe, û bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

3) Peyhatiyên geometrî

Teorî

Eger q hejmarek rast be:

- **a)** Dema ku $-1 < q < 1$ wê demê: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
- **b)** Dema ku $1 < q$ wê demê: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$
- **c)** Dema ku $q < -1$ wê demê: dawî nîne
- **d)** Dema ku $q = 1$ wê demê: peyhatiya $(q^n)_{n\geq 0}$ neguhêr e û hemû pêkhateyên wê yeksanî 1 in û $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$

Mînak 1:

Peyhatiya geometrî $u_n = (\frac{4}{5})^n$ nêzîkera sifir e,

ji ber ku $-1 < \frac{4}{5} < 1$

Peyhatiya geometrî $u_n = (\frac{5}{4})^n$ dûrkerê $+\infty$ ye,

ji ber ku $\frac{5}{4} > 1$

Mînak 2:

Eger peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ ber bi 3 ve biçe, li gorî ku:

$u_n = \frac{3n-1}{n+1}$, hejmara xwezayî n_0 li gorî mercê li jêr bibîne.

Eger $n > n_0$ wê demê: $u_n \in]2.99, 301[$ e.

Çareserî:

Dema ku $u_n \in]2.99, 301[$ ev tê wateya ku $-0.01 < u_n - 3 < 0.01$ yan jê $|u_n - 3| < 0.01$, lê $u_n - 3 = \frac{-4}{n+1}$ li gorî vê, merc bi vî awayî dibe: $\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100} \implies 400 < n + 1$ yan $\mathrm{n} > 399$, li gorî vê: navbera $]2.99, 301[$ pêkhateyên peyhatiyê bi giştî dihewîne.

Bi awayekî giştî

$I_\alpha \in]3-\alpha, 3+\alpha[\ :\ \alpha > 0$ lê bi mercê $\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| < \alpha$

Ango $n+1 > \frac{4}{\alpha}$, eger n_0 hejmarek xwezayî be: $n_0 \geq \frac{4}{\alpha}$

Li gorî vê: $u_n \in I_\alpha : n > n_0$

Mînak:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ be, li gorî ku $u_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{2^n}$ ye.

Tekez bike ku $(u_n)_{n\geq 0}$ nêzîker e û dawiya wê bibîne.

Çareserî:

Tê dîtin ku $u_n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Xwiya ye ku bingeha pêkhateyan $\frac{1}{2}$ ye, encama komkirina di navbera kevanan de bi vî awayî tê danîn:

$$u_{10} \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Li gorî vê, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ peyhatiyeke geometrî ye, bingeha wê $q = \frac{1}{2} : |q| < 1$, nêzîker e û ber bi sifir ve diçe.

Hînkirin:

1) Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ peyhatiyek be li gorî ku $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ û $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Hejmara xwezayî n_0 li gorî ku $u_n \in]-10^{-3}, 10^{-3}[$ ji bo her nirxê $n > n_0$ be, bibîne.
2) Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ peyhatiyek be li gorî ku $u_n = \frac{3n+1}{n-1}$ û $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$. Hejmara xwezayî n_0 li gorî ku $u_n \in]2.98, 3.02[$ ji bo her nirxê $n > n_0$ be, bibîne.
3) Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ peyhatiyek be li gorî ku $u_n = n\sqrt{n}$ û $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Hejmara xwezayî n_0 li gorî ku $u_n > 10^6$ ji bo her nirxê $n > n_0$ be, bibîne.
4) Eger $(x_n)_{n\geq 1}$ û $(y_n)_{n\geq 1}$ du peyhatî bin li gorî ku $x_n = \frac{3^n}{2^n}$ û $y_n = \frac{10^n}{(10.1)^n}$ be, dawiya her du peyhatiyan bibîne.
5) Eger $(x_n)_{n\geq 0}$ û $(y_n)_{n\geq 0}$ du peyhatî bin li gorî ku $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2$, $x_0 = 3$ û $y_n = x_n + 3$ be.
   a) Tekez bike ku $(y_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometrî ye û x_n , y_n bi nîşaneya n bibîne.
   b) Eger $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ û $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$ be, S_n , S'_n bi nîşaneya $\boldsymbol{n}$ bibîne.

TEORIYÊN DAWIYAN

1) Peyhatiyên bi awayê $u_n = f(n)$

Teorî 1:

Eger f di navbera $]b, +\infty[$ de fonksiyonek be û $(u_n)_{n \geq n_0}$ peyhatiyek be ku ji n_0 dest pê dike bi awayê $u_n = f(n)$.

Li gorî vê, eger $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ be, wê demê $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

ℓ hejmarek rast e, an $+\infty$ an jî $-\infty$ ye.

Mînak:

Dawiya peyhatiya $(u_n)_n \geq 1$ li gorî ku $u_n = \frac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$ bibîne.

Çareserî:

Li gorî karanînên li ser dawiyan, rewşa nediyar ya bi awayê $\frac{+\infty}{+\infty}$ çêdibe, lê $u_n = f(n)$: $f(x) = \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x}$ û ji ber ku $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, tê dîtin ku $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

2) Peyhatiyên bi awayê $u_n = f(v_n)$

Teorî 2:

Eger f di navbera I de fonksiyonek be û $(u_n)_{n \geq 0}$ peyhatiyek be ku pêkhateyên wê bi giştî endamên I ne.

Li gorî vê, eger $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$, û $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$ be, wê demê $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = c$

c, b hejmarên rast in, an $+\infty$ an jî $-\infty$ ne.

Mînak:

Peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$ nêzîker e û dawiya wê yeksanî $\sqrt{3}$ ye, ji ber ku $u_n = \sqrt{v_n}$ li gorî ku $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$

Lê ji ber ku $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$ û $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$ li gorî van: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$

3) Karanînên li ser dawiyan, teoriyên dorpêçkirinê

Teorî 3:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ û $(w_n)_{n\geq 1}$ sê peyhatî bin û $\ell \in \mathbb{R}$ be, bi pêkanîna her du mercên li jêr:

a) $v_n \geq u_n \geq w_n \qquad (\mathrm{n} > n_0)$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Teorî 4:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ û $(e_n)_{n\geq 1}$ du peyhatî bin û $\ell \in \mathbb{R}$ be, bi pêkanîna her du mercên li jêr:

a) $e_n \geq |u_n - \ell|$ li gorî ku $\mathrm{n} > n_0$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$

Tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Teorî 5:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ û $(v_n)_{n\geq 1}$ du peyhatî bin, li gorî ku $v_n \geq u_n$ li gorî ku $\mathrm{n} > n_0$,

a) Eger $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ be, tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
b) Eger $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ be, tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Mînak 1:

Peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ nêzîker e û dawiya wê yeksanî 0 e, tê zanîn ku $|\sin n| \leq 1$, li gorî vê; $|u_n - 0| \leq \frac{1}{n+1}$

Û ji ber ku $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ e, tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (li gorî teoriya 4)

Mînak 2:

Dawiya peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = n - \sqrt{n}$ bibîne.

Çareserî:

Ji ber ku $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ û $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, tê dîtin ku rewş nediyar e bi awayê $(+\infty - \infty)$ ye, lê gava em bi vî awayî binivîsin:

$u_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (me n derxist derveyî kevanê)

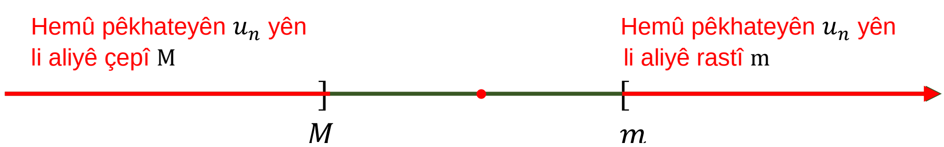
Û ji ber ku $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ tê dîtin ku $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Nêzîkbûna peyhatiyan

Destpêkê em peyhatiyên ji jor an jî ji jêr ve bi sînor nas bikin.

Eger M û m du hejmarên rast bin:

(u_n) ji jor ve bi sînor e	$u_n \leq M$; $n \in \mathbb{N}$ (M pêkhateya mezin e)
(u_n) ji jêr ve bi sînor e	$u_n \geq m$; $n \in \mathbb{N}$ (m pêkhateya biçûk e)
(u_n) bi sînor e, tê wateya ku ji jor û jêr ve bi sînor e	



Mînak:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ peyhatiyek be, tekez bike ku ji jor û jêr ve bi sînor e.

Çareserî:

Ji ber ku $n+1 > n$ tê dîtin ku $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ li gorî vê; $u_n > 0$ wê demê peyhatî ji jor ve bi sînor e ($m = 0$ pêkhateya biçûk e).

Ji ber ku $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1$, bi hevdana bi hevjimar re tê dîtin ku $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq 1$ wê demê peyhatî ji jêr ve bi sînor e ($m=1$ pêkhateya mezin e).

Teorî 1:

c) Her peyhatiya zêdeker û ji jor ve bê sînor, bi $+\infty$ bi dawî dibe.
d) Her peyhatiya kêmker û ji jêr ve bê sînor, bi $-\infty$ bi dawî dibe.

Teorî 2:

a) Her peyhatiya zêdeker û ji jor ve bi sînor, nêzîkbûye.
b) Her peyhatiya kêmker û ji jêr ve bi sînor, nêzîkbûye.

Mînak:

Eger $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_1=\frac{7}{3}$ peyhatiyek be û $u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}$

a) tekez bike ku $u_n\geq 1$ e.
b) tekez bike ku u_n kêmker û nêzîkbûyî ye.

Çareserî:

a) Em dizanin ku $u_1\geq 1$, em rastiya $u_p\geq 1$li gorî ku $p\in\mathbb{N}^*$ be erê bikin, li gorî vê, em tekez bikin ku $u_{p+1}\geq 1$:

$$u_{p+1}-1=\frac{7u_p+3}{3u_p+7}-1=\left(\frac{4}{3u_p+7}\right)\left(u_p-1\right)\geq 0$$

ji ber ku $\left(u_p-1\right)\geq 0$ û $\left(\frac{4}{3u_p+7}\right)>0$

$\Rightarrow u_{p+1}\geq 1$

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}-u_n=\frac{3\left(1-u_n^2\right)}{3u_n+7}$

lê $1-u_n^2\leq 0$ e, li gorî vê: $u_{n+1}-u_n\leq 0$
wê demê u_n kêmker e û ji jor ve bi sînor e û nêzîkbûye.

Têbînî:

- Eger peyhatiyek ji jor ve bê sînor be, wê demê ne pêwîst e ku dawiya wê $+\infty$ be.
  Mînak:
  peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = n + (-1)^n n$, yan jî $u_{2n} = 4n$ û $u_{2n+1} = 0$ ji jor ve bê sînor e û dawiya wê ne $+\infty$ ye.
- Eger peyhatiyek bi $+\infty$ bi dawî bibe, ne pêwîst e ku zêdeker be.
  Mînak:
  peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ li gorî ku $u_n = 2n + (-1)^n n$, yan jî $u_{2n} = 6n$ û $u_{2n+1} = 2n + 1$, ne zêdeker e lê $u_n \geq n$,
  li gorî wê: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Hînkirin:

I. Dawiya peyhatiya $(u_n)_{n\geq 1}$ eger hebe bibîne.

1) $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ **2)** $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$

3) $u_n = \frac{1}{n+1}$ **4)** $u_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$

5) $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$ **6)** $u_n = \frac{n}{4} + \frac{2n}{n^2+1}$

7) $u_n = \frac{10n-3}{n^2+1}$ **8)** $u_n = \frac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$

9) $u_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+1}}$ **10)** $u_n = \sqrt{\frac{2n^2-1}{3n+1}}$

11) $u_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3n+1}\right)$ **12)** $u_n = \sin\left(\frac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

13) $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ **14)** $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$

15) $u_n = \frac{n!-2}{n!}$ **16)** $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$

17) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$ **18)** $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

II. Peyhatiyên li jêr, ji jor an ji jêr ve bi sînor in? bibîne.

1) $u_n = \sin n$ **2)** $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

3) $u_n = \frac{1}{n+2}$ **4)** $u_n = \frac{1}{1+n^2}$

5) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ **6)** $u_n = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}}$

7) $u_n = \frac{-2}{\sqrt{2n+3}}$ **8)** $u_n = n\sqrt{3} - 2$

9) $u_n = n^2 + n - 1$ **10)** $u_n = \frac{1}{n+1} + n^2$

PIRSÊN BEŞA PÊNCEM

1) Eger $(u_n)_n$ û $(v_n)_n$ du peyhatî bin li gorî ku

$u_0 = 0$ û $u_{n+1} = 2u_n + 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$, $v_n = 3^n - u_n \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Tekez bike ku $u_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

b) Tekez bike ku u_n kêmker û nêzîkbûyî ye.

c) Tekez bike ku v_n peyhatiyeke geometrî ye ku bingeha wê 2 ye.

d) $\boldsymbol{v_n}$ û $\boldsymbol{u_n}$ bi nîşana $\boldsymbol{n}$ bibîne.

e) $\boldsymbol{S_n}$ bi nîşana $\boldsymbol{n}$ bibîne.

$S_n = u_0 + u_2 + \cdots + u_n$

2) Eger $(u_n)_n$ peyhatiyek be li gorî ku

$u_0 = -\frac{5}{4}$ û $u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Tekez bike ku $-2 < u_n < -1 \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

b) Tekez bike ku u_n kêmker û nêzîkbûyî ye.

c) Dawiya peyhatiya u_n bibîne.

3) Eger $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peyhatiyek be li gorî ku

$u_0 = 0$ û $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - n - \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$

a) u_1 bibîne.

b) Tekez bike ku $u_n \geq -2n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

c) Tekez bike ku u_n kêmker e.

d) Eger $v_n = 2u_n + 4n - 6 \quad (n \in \mathbb{N})$

e) Tekez bike ku v_n peyhatiyeke geometrî ye ku bingeha wê $\frac{1}{2}$ ye.

f) Tekez bike ku $u_n = 3 - 2n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

g) Dawiya peyhatiya u_n bibîne.

4) Eger u_n peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{2 + u_n} : n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Tekez bike ku $0 \leq u_n \leq 1 \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

b) Tekez bike ku u_n kêmker û nêzîkbûyî ye.

c) Tekez bike ku $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

d) Dawiya peyhatiya $\boldsymbol{u_n}$ bibîne.

5) Eger u_n peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$u_0 = 4 \text{ û } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 3) \;:\; n \in \mathbb{N}$$

Û v_n peyhatiyeke din be $v_n = u_n - 3 \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Tekez bike ku v_n peyhatiyeke geometrî ye, bingeha wê û v_0 bibîne.

b) Tekez bike ku $u_n = 3 + \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ ye.

c) Tekez bike ku u_n kêmker e û $u_n \geq 3$ e.

d) Eger $S_n = u_0 + u_2 + \cdots + u_n \quad (n \in \mathbb{N})$

e) Tekez bike ku $S_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

f) $\lim S_n$ bibîne.

6) Eger u_n û v_n du peyhatî bin:

$$u_0 = 0 \text{ û } u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{{u_n}^2}{3}} \quad (n \in \mathbb{N}) \;,\; v_n = 12 - {u_n}^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) u_1 bibîne.

b) tekez bike ku $0 < u_n < 2\sqrt{3} \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

c) tekez bike ku u_n zêdeker e.

d) tekez bike ku u_n nêzîkbûyî ye.

e) tekez bike ku v_n peyhatiyeke geometrî ye, bingeha wê û v_0 bibîne.

f) v_n û u_n bi nîşana $\boldsymbol{n}$ bibîne.

g) $\lim u_n$ bibîne.

7) Eger u_n peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$u_0 = 2 \text{ û } u_{n+1} = \frac{7u_n}{1+2u_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Û v_n peyhatiyek be: $v_n = \frac{u_n}{3-u_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Tekez bike ku $0 < u_n < 3 \quad (n \in \mathbb{N})$ e.

b) Tekez bike ku u_n zêdeker e.

c) Tekez bike ku v_n peyhatiyeke geometrî ye

d) v_n û u_n bi nîşana n bibîne.

e) $\lim u_n$ bibîne.

8) Nêzîkbûna van her du peyhatiyan bibîne.

a) $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ **b)** $u_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$

9) Eger(u_n) peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n \geq 1)$$

a) Tekez bike ku : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $\quad n \in \mathbb{N}$ ye.

b) Tekez bike ku $u_n \geq 3$ ye (3 pêkhateya mezin e ya $u_{n\geq 0}$).

c) Tekez bike ku u_n nêzîkbûyî ye.

10) Eger(u_n) peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

a) Tekez bike ku $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ û piştre tekez bike ku(u_n) ber bi sifir re nêzîkbûyî ye.

b) Eger $(v_n)_{n\geq 1}$ peyhatiyeke din be:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

Bi sûdwergirtina ji agahiyên $\boldsymbol{u_n}$, bendekeya v_n bi nîşaneya $\boldsymbol{n}$ bi awayekî sade bibîne.

11) Eger(u_n) peyhatiyek bi awayê li jêr be:

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad (n \geq 1)$$

a) Tekez bike ku u_n zêdeke e.

b) Tekez bike ku : $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ $\quad (n \geq 1)$ e.

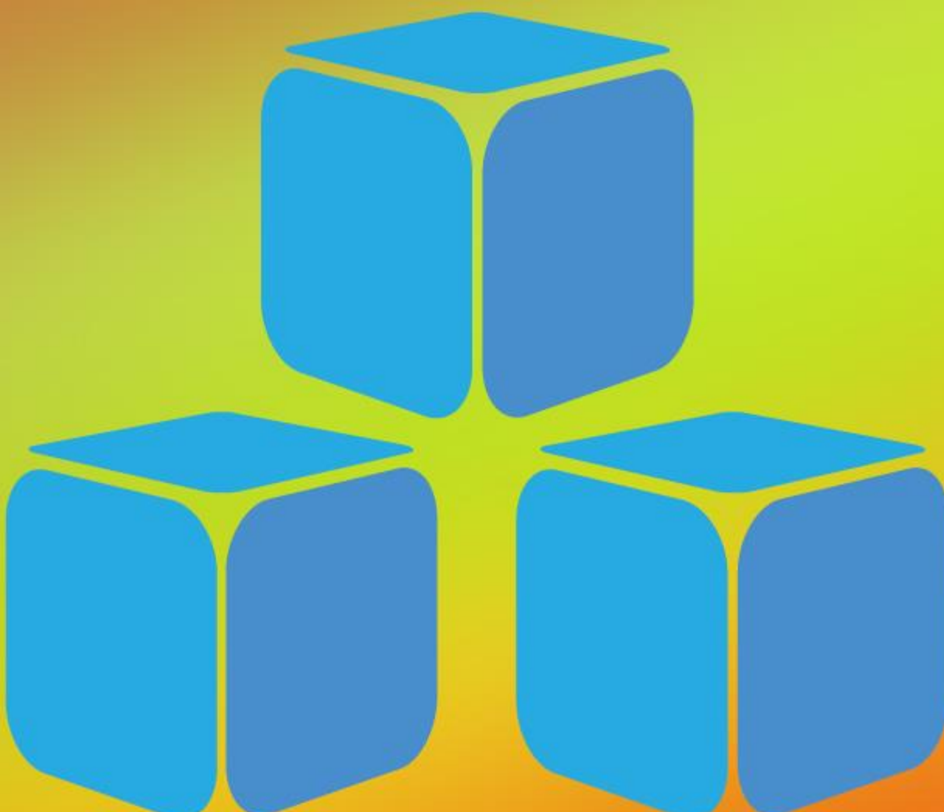
c) Tekez bike ku peyhatî zêdeker û nêzîkbûyî ye.

CEBIR

BEŞA ŞEŞEM

DIBETÎ

1) Dibetî
2) Dibetiya mercî
3) Dibetiyên serbixwe
4) Fonksiyona nenasê dibetiyê



DIBETÎ

Hin têgehên bingehîn yên dibetiyê

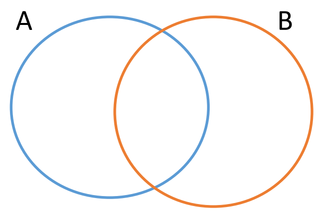
Tecrube :her ceribandineke ku çêbûna wê gengaz e, yan jî bûyereke xwezayî ye ku encamên wê tên naskirin.

Encamên tecrubeyê: bi tevahî encamên ku ji ceribandinê tên bidestxistin, sembola wê $\boldsymbol{\Omega}$ (omêga) ye.

Bûyer: binkomika encamên tecrubeyê Ω ye, sembola wê jî yek ji tîpên **A**, **B**, **C**, **D**, … ye.

Hin bûyerên taybet

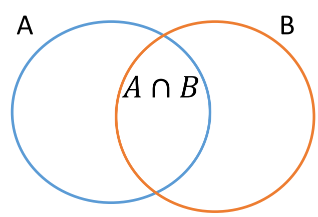
- Bûyera tekez: $\boldsymbol{\Omega}$
- Bûyera negengaz: $\boldsymbol{\phi}$
- Bûyera sade: bûyera bi endamekî.
- Bûyerên dijber: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ dijber in $\rightarrow \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}$
- Bûyerên hevtemamker: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ hevtemamker in $\rightarrow \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}$ û $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega}$, di heman demê de: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega} \backslash \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$



$A \cup B$

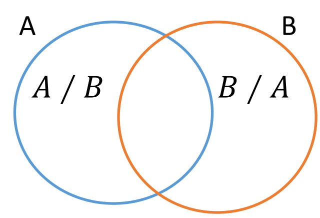
Karanînên li ser bûyeran

a) Yekgirtina du bûyeran:
Bûyerên endamên $\boldsymbol{A}$ yan jî $\boldsymbol{B}$, endamên hevgirtina her du bûyerên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ ne, sembola wê $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ yan jî $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ye



b) Qetandina du bûyeran:
Bûyerên endamên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, endamên qetandina her du bûyerên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ ne.
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ye

c) Ferqa du bûyeran:
Ferqa $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, bûyerên ku endamên $\boldsymbol{A}$ ne, lê ne endamên $\boldsymbol{B}$ ne.
Ferqa $\boldsymbol{B}$ û $\boldsymbol{A}$, bûyerên ku endamên $\boldsymbol{B}$ ne, lê ne endamên $\boldsymbol{A}$ ne.



$\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}$ ye.
$\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ û $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$ ye

Fonksiyona dibetiyê

Eger $\boldsymbol{\Omega}$ encamên tecrubeyeke diyarkirî be, wê demê fonksiyona $\boldsymbol{P}$ ya ku ji $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega})$ dest pê dike û bi $[0,1]$ bi dawî dibe, jê re fonksiyona dibetiyê tê gotin, lê du mercên wê hene:

1) $P(\Omega) = 1$
2) Eger $A \cap B = \emptyset$, wê demê $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ û ji $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$ re **fezaya dibetiya bi dawî** tê gotin.

Di fezaya dibetiya bi dawî de $(\Omega, P(\Omega), P)$:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Têbînî:

$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$

Mînak 1:

Di sindoqekê de 8 kartên bi hejmarên 1,…,8 nîşankirî hene, bi kişandina sê kartan, encamên tecrubeyê Ω li gorî rewşên li jêr bibîne.

1) Kişandina 3 kartan li pey hev bi vegerandin.
2) Kişandina 3 kartan li pey hev bê vegerandin.
3) Kişandina 3 kartan bi hev re.

Çareserî:

1) Karta yekem bi 8 awayan, ya duyem bi 8 awayan û ya sêyem jî bi 8 awayan tên kişandin, li gorî vê:
$\mathrm{n}(\Omega) = 8.8.8 = 8^3 = 512$

2) Karta yekem bi 8 awayan, ya duyem bi 7 awayan û ya sêyem bi 6 awayan tên kişandin, li gorî vê:
$n(\Omega) = 8.7.6 = 336$

3) Binkomikeke ji 3 endaman ji komika {1, … ,8} tê kişandin, li gorî vê:
$n(\Omega) = C(8,3) = 8.7 = 56$

Mînak 2:

Di sindoqekê de 15 gokên wek hev hene, 6 ji wan spî, 7 reş û 2 gok sor in

1) Me gokeke tenê derxist, dibetiya ku gok spî be bibîne.
2) Me 2 gok li pey hev û bê vegeranidin derxistin, dibetiya ku her du gok sor bin, bibîne.
3) Me 3 gok li pey hev û bê vegeranidin derxistin, dibetiya ku rengê her sê gokan jev cuda be, bibîne.
4) Me 3 gok li pey hev û bi vegeranidin derxistin, dibetiya ku rengê her sê gokan jev cuda be, bibîne.
5) Me 3 gok li pey hev û bi vegeranidin derxistin, dibetiya ku rengê her sê gokan sor be, bibîne.
6) Me 7 gok bi hev re derxistin, dibetiya ku rengê van gokan bi vî awayî be: 3 spî, 2 reş û 2 sor, bibîne.
7) Me 3 gok bi hev re derxistin, dibetiya ku herî kêm gokek ji wan sor be, bibîne

Çareserî:

1) $\frac{C(6,1)}{C(15,1)} = \frac{6}{15}$
2) $\frac{C(2,2)}{C(15,2)} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$
3) Dibetiya ku rengên gokan bi rêzê spî, reş û sor be:
$\frac{6.7.2}{P(15,3)} = \frac{6.7.2}{15.14.13} = \frac{2}{65}$
Ev jî yeksanî dibetiya her yek ji her şeş guhertinên ku li gorî wan derxistina gokên jev cuda pêk tê.
Li gorî vê; dibetiya ku rengê gokan jev cuda be:
$\frac{2}{65} \times 3! = \frac{12}{65}$
4) $\frac{2.6.7}{15.15.15} \times 3! = \frac{56}{375}$
5) $\frac{2.2.2}{15.15.15} \times 3! = \frac{8}{3375}$

6) $\frac{C(6,3).C(7,2).C(2,2)}{C(15,7)} = \frac{28}{429}$

7) Em dikarin bi du awayan çareser bikin:

Awayê yekem:

Eger A bûyera bidestxistina herî kêm gokek, A_1 bûyera bidestxistina tenê gokeke sor û A_2 bûyera bidestxistina du gokên sor be:

$$P(A_1) = \frac{C(2,1).C(13,2)}{C(15,3)} = \frac{12}{35}$$

$$P(A_2) = \frac{C(2,2).C(13,1)}{C(15,3)} = \frac{1}{35}$$

Lê her du bûyerên A_1 û A_2 dijberî hev in, li gorî vê:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{12}{35} + \frac{1}{35} = \frac{13}{35}$$

Awayê duyem:

Eger A_0 bûyera bidestxistina gokên ne sor be, wê demê bûyera A dijberî A_0 be ango $\mathrm{A} = A_0' = \Omega \backslash A_0$

Lê $P(A_0) = \frac{C(13,3)}{C(15,3)} = \frac{22}{35}$

li gorî vê: $P(A) = 1 - P(A_0) = \frac{13}{35}$

Hînkirin:

1) Di refekê de 8 keç û 12 xort hene, em dixwazin komîteya paqijiyê ji 3 kesan ava bikin. Dibetiyên li jêr bibîne.
a) Endamên komîteyê tev keç bin.
b) Enamên komîteyê tenê 2 ji wan keç bin.
c) Enamên komîteyê tenê 1 ji wan keç be.
d) Enamên komîteyê tenê 1 ji wan xort be.

2) Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de:
A: bûyera ku hejmara 3 li jorî yekê ji wan be.
B: bûyera ku komkirina her du hejmarên li jor, biçûktir be ji 7.
Dibetiyên li jêr bibîne.
A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap B'$, $A' \cap B'$, $A' \cup B'$, $A \backslash B$, $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$

3) Di sindoqekê de heft kartên bi van hejmaran 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 nîşankirî hene, em du kartan bi hev re bikişînin, dibetiya van bûyeran bibîne.
a) $\boldsymbol{B}$ bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên wan cot be.
b) $\boldsymbol{C}$ bûyera bidestxistina karteke ku hejmara 6 li ser be.
c) $\boldsymbol{D}$ bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên li ser wan ji 7 mezintir be.
d) $\boldsymbol{E}$ bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên li ser wan ji 7 mezintir be yan her du hejmar tekane bin.

4) Eger dibetiya girûpa xwîna yekî A be yeksanî 0.35 be, dibetiya ku potansiyona wî bilind be yeksanî 0.15 be û dibetiya ku potansiyona wî bilind be yan jî girûpa xwîna wî A be yeksanî 0.40 be. Dibetiyên li jêr bibîne.
a) Potansiyona wî bilind e û girûpa xwîna wî A ye.
b) Potansiyona wî ne bilind e.

DIBETIYA MERCÎ

Di tecrubeyekê de ku du bûyerên wê hene $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, eger bandora pêkhatina bûyera $\boldsymbol{A}$ li ser bûyera $\boldsymbol{B}$ hebe, wê demê jê re **dibetiya mercî** tê gotin, sembola wê $\boldsymbol{P_B(A)}$ ye û bi vî awayî tê nivîsandin:

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (dibetiya bûyera $\boldsymbol{A}$ li gorî pêkhatina $\boldsymbol{B}$) tê xwendin.

Mînak:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eger A bûyera ku hejmara li jor 3 be, wê demê:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Û eger B bûyera ku hejmara li jor kit be, wê demê:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Lê eger bê zanîn ku bûyera B pêkhatiye, li gorî vê, $\Omega = \{1, 3, 5\}$, û dibetiya bûyera A li gorî ku bûyera B pêk hatiye bi vî awayî tê dîtin:

$P_B(A) = \frac{n(\{3\})}{n(\{1,3,5\})} = \frac{1}{3}$ yan jî $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

Teorî

Eger $(\Omega, P(\Omega), P)$ fezaya dibetiya bi dawî be, B bûyereke li gorî ku $P(B) \neq 0$ be, li gorî van; fonksiyona $P_B: P(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyoneke dibetiyê ye û navê wê dibe **dibetiya mercî bi bûyera $\boldsymbol{B}$**.

1) Eger $\boldsymbol{P_B}$ fonksiyona dibetiyê be, wê demê hemû taybetiyên fonksiyona dibetiyê pêk tên:
   a) $P_B(A') = 1 - P_B(A)$
   b) $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1 \cap A_2)$
2) Zagona dibetiya yekgirtî ya du bûyeran:
   Eger $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ di $(\Omega, P(\Omega), P)$ de du bûyer bin û $\mathrm{P(A)} \neq 0$, $\mathrm{P(B)} \neq 0$ be, li gorî vê:
   a) $P(A \cap B) = P(B).P_B(A)$
   b) $P(A \cap B) = P(A).P_A(B)$
3) Eger $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ û $\boldsymbol{C}$ di $(\Omega,\ P(\Omega),\ P)$ de sê bûyer bin, $P(A \cap B) \neq 0$ û $\mathrm{P(A)} \neq 0$ be li gorî vê:
   $$P(A \cap B \cap C) = P\big((A \cap B) \cap C\big) = P\big((A \cap B)\big).P_{A \cap B}(C)$$
   $$= P(A).P_A(B).P_{A \cap B}(C)$$
4) Di vezaya dibetiya yeksan de:
   $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Mînak 1:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eger $\boldsymbol{A}$ bûyera ku hejmara 2 li jor be.

Eger $\boldsymbol{B}$ bûyera ku hejmara li jor cot be.

$P_B(A)$ bibîne.

Çareserî:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\,2\} \Rightarrow n(A) = 1$

$$\begin{cases} \mathrm{B} = \{\,2, 4, 6\} \Rightarrow n(B) = 3 \\ A \cap B = \{\,2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \end{cases} \Rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

Mînak 2:

Di Sindoqekê de pênc gokên sor bi hejmarên 1,1,1,1,2 nîşankirî ne û sê gokên şîn bi hejmarên 1,1,2 nîşankirî hene. Me du gokên li pey hev bê vegerandin derxistin,

Dibetiya bûyerên li jêr bibîne.

1) Komkirina hejmarên li ser her du gokan yeksanî 2 be.
2) Du gokên sor bin ku komkirina hejmara li ser her duyan yeksanî 2 be.
3) Eger bê zanîn her du gok sor in, dibetiya komkirina hejmarên her duyan yeksanî 2 be, bibîne.
4) Eger bê zanîn ku komkirina hejmarên her duyan yeksanî 2 be, dibetiya ku her du gok sor bin, bibîne.

Çareserî:

1) **A**: Bûyera derxistina du gokan, komkirna hejmarên li ser her duyan yeksanî 2 be.
$P(A) = \frac{c(6,2).c(2,0)}{c(8,2)} = \frac{15}{28}$
2) **B**: Bûyera derxistina du gokên sor be, em bûyera **B** bibînin
$P(B) = \frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{c(4,2)}{c(8,2)} = \frac{3}{14}$
3) R: Bûyera du gokên sor be, em bûyera **A** bibînin.
$P_R(A) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{n(R \cap B)}{n(R)} = \frac{c(4,2)}{c(5,2)} = \frac{3}{5}$
4) $P_A(R) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{P(D)}{n(A)} = \frac{3}{14} . \frac{28}{15} = \frac{2}{5}$

Mînak 3:

Du sindoqên wek hev hene, di ya yekem $\boldsymbol{I}$ de 2 gokên sor û 3 gokên spî hene, di ya duyem $\boldsymbol{II}$ de $\boldsymbol{n}$ gokên sor û 1 gok spî heye. Me gokek ji sindoqekê ji wan derxist.

Eger $\boldsymbol{A}$ bûyera bidestxistina gokeke sor be û $\boldsymbol{B}$ bûyera ku gok ji sindoqa $\boldsymbol{II}$ be. Li gorî ku $\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$, nirxê $\boldsymbol{n}$ bibîne.

Çareserî:

Em dizanin bûyera ku gok ji sindoqa $\boldsymbol{I}$ be, dijberî bûyera $\boldsymbol{B}$ ye ango $\boldsymbol{B}'$ ye, li gorî vê;

$A = (A \cap B') \cup (A \cap B) \Longrightarrow$

$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

$P(A) = P(B').P_{B'}(A) + P(B).P_B(A)$

Lê $P(B) = P(B') = \frac{1}{2}$, $P_B(A) = \frac{n}{n+1}$ û $P_{B'}(A) = \frac{2}{5}$, li gorî vê:

$$P(A) = \frac{1}{2}.\frac{2}{5} + \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1} = \frac{7n+2}{10(n+1)}$$

Û $P(A \cap B) = P(B).P_B(A) = \frac{1}{2}.\frac{n}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}$ li gorî vê:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n}{2(n+1)}.\frac{10(n+1)}{7n+2} = \frac{5\,n}{7n+2}$$

Lê li gorî ku hatî dayîn $\boldsymbol{P_A(B)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}$ wê demê:

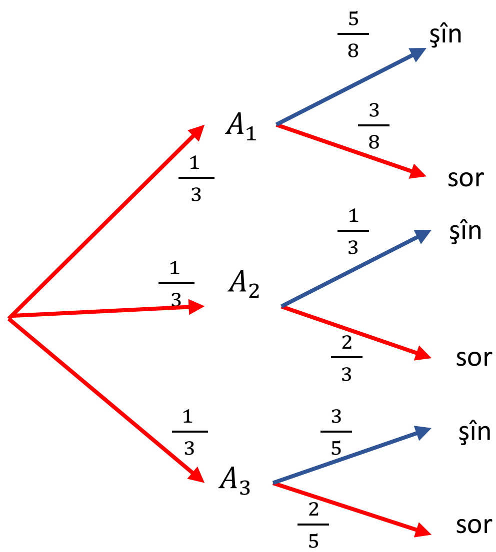
$$\frac{5\,n}{7n+2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}} \Longrightarrow \boldsymbol{n = 2}$$

Mînak 4:

Sê sindoq hene; di sindoqa yekem A_1 de 5 gokên şîn û 3 gokên sor hene, di sindoqa duyem A_2 de 1 gokên şîn û 2 gokên sor hene, di sindoqa sêyem A_3 de 3 gokên şîn û 2 gokên sor hene.

Me sindoqek hilbijart û gokek jê kişand, ew gok sor bû, dibetiya ku goka sor ji sindoqa A_1 be bibîne.

Çareserî:



Eger A bûyera ku gok sor be.

$$P_A(A_1) = \frac{P(A \cap A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{45}{173}$$

Mînak 5:

Di sindoqekê de 6 gokên sor û 4 gokên reş hene, me du gok li pey hev û bêveger derxistin, eger bê zanîn ku goka yekem sor e, dibetiya ku goka duyem sor be bibîne.

Çareserî:

Eger A bûyera ku goka yekem sor be û B bûyera ku goka duyem sor be.

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{c(6,2)}{c(10,2)} = \frac{1}{3}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}$$

Hînkirin:

1) Di refekê de 45 xwendekar hene, 27 ji wan zimanê Îngilîzî, 15 zimanê Firansî û 9 hem zimanê Îngilîzî û hem zimanê Firansî dixwînin. Xwendekarek ji refê derket, yên li jêr bibîne.

a) Dibetiya xwendekar herî kêm zimanekî dixwîne.

b) Eger bê zanîn ku xwendekar zimanê Firansî dixwîne, dibetiya ku zimanê Îngilîzî dixwîne.

c) Eger bê zanîn ku xwendekar zimanê Îngilîzî dixwîne, dibetiya ku zimanê Firansî dixwîne.

2) Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de careke tenê, dibetiyên li jêr bibîne.

a) Eger bê zanîn ku hejmarên li ser her duyan heman in, hejmara 2 li ser her duyan be.

b) Eger bê zanîn ku hejmarên li ser her duyan her yek ji wan ji 4 mezintir e, hejmara 5 li ser her duyan be.

c) Hejmara 3 dernekeve li gorî ku her du hejmarên li ser her duyan kit in.

3) Di sindoqekê de 5 gokên spî û 7 gokên reş hene, me du gok li pey hev û bêveger derxistin. Dibetiyên li jêr bibîne.

a) Goka duyem spî be li gorî ku ya yekem jî spî ye.

b) Goka yekem spî be û ya duyem jî spî be.

c) Goka duyem reş be û ya yekem spî be.

DIBETIYÊN SERBIXWE

Eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ di fezaya dibetiyê $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$ de, du bûyerên serbixwe bin li gorî ku $\mathbf{P}(\boldsymbol{B}) \neq \mathbf{0}$, wê demê:

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Mînak:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de careke tenê, A bûyera ku hejmareke cot li jor be, B bûyera ku dama hejmareke tam li jor be. Tekaz bike ku A û B serbixwe ne.

Çareserî:

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 4\}$ û $A \cap B = \{4\}$ li gorî van:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ û $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Diyar e ku $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ango her du bûyerên A û B serbixwe ne.

Têbînî:

Di tecrubeya avêtina nîşanekê, diravên kanzayî, berika zarê û kişandina bi vegerandinazêdetirî carekê li pey hev de, dibetî serbixwe ne.

Teorî

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$, eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyerên serbixwe bin, wê demê A, B' serbixwe ne.

Tekezkirin:

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) \qquad : A, B$ serbixwe ne

$$= P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$

Li gorî vê, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}'$ serbixwe ne.

Encam:

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$:

1) Eger A, B du bûyerên serbixwe bin, Wê demê A', B serbixwe ne.
2) Eger A, B du bûyerên serbixwe bin, Wê demê A', B' serbixwe ne.

Mînak:

Du lîstikvan A û B ne, her yekî ji wan tîrek avête nîşanê, eger dibetiya ku lîstikvanê yekem A li nîşanê bide yeksanî $\frac{6}{10}$ be û dibetiya ku lîstikvanê duyem B li nîşanê bide yeksanî $\frac{7}{10}$ be.

1) Dibetiya ku her du lîstikvan li nîşanê bidin, bibîne.
2) Dibetiya ku herî kêm yek ji wan li nîşanê bide, bibîne.
3) Dibetiya ku her du li nîşanê nedin, bibîne.
4) Dibetiya ku tenê yek ji wan li nîşanê bide, bibîne.
5) Eger bê zanîn ku herî kêm yekî ji wan li nîşanê daye, dibetiya ku tenê lîstikvanê A li nîşanê daye, bibîne.

Çareserî:

A bûyera lîstikvanê A li nîşanê daye, $\mathrm{P}(A) = \frac{6}{10}$

B bûyera lîstikvanê B li nîşanê daye, $\mathrm{P}(B) = \frac{7}{10}$

1) Eger yek ji lîstikvanan li nîşanê bide, bandorê li dibetiya ku yê din li nîşanê bide, nake ango her du bûyerên A, B serbixwe ne, li gorî vê:
$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{6}{10}.\frac{7}{10} = \frac{42}{100}$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10} + \frac{7}{10} - \frac{42}{100} = \frac{88}{100}$

3) Eger F bûyera ku her du li nîşanê nedin be, li gorî vê: $F = P(A \cup B)' = A' \cap B'$
$P(F) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{88}{100} = \frac{12}{100}$

4) Eger D bûyera ku tenê yek ji wan li nîşanê bede be, li gorî vê:
$D = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

$$P(D) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{88}{100} - \frac{42}{100} = \frac{46}{100}$$

5) Bûyera ku tenê lîstikvanê A li nîşanê bide $A_1 = A \backslash B = A \cap B'$ lê ji ber ku A û B' serbixwe ne, em dikarin bi vî awayî binivîsin:

$$P(A_1) = P(A \cap B') = P(A).P(B') = \frac{6}{10}.\frac{3}{10} = \frac{18}{100}$$

$$P_{A\cup B}(A_1) = \frac{P\big((A \cup B) \cap A_1\big)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A_1)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{18}{100}}{\frac{88}{100}} = \frac{9}{44}$$

Hînkirin:

1) Du xwendekaran ezmûna zimanê Kurdî derbas kirin, dibetiya serketina xwendekarê yekem $\frac{3}{4}$ e û dibetiya serketina yê duyem $\frac{4}{5}$ e.
a) Dibetiya serketina her duyan bi hev re, bibîne.
b) Dibetiya serketina herî kêm yek ji wan, bibîne.

2) Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de, rengê yekî ji wan sor û yê din kesk e. A bûyera ku hejmara 4 li ser berika sor be, B bûyera ku komkirina hejmarên li ser her du berikan kit be, her du bûyer serbixwe ne yan na?

3) Di sindoqekê de 3 gokên zer û 4 gokên reş hene, me 2 gok li pey hev û bi vegerandin derxistin.
a) Dibetiya ku goka yekem zer be, bibîne.
b) Dibetiya ku goka duyem reş be, bibîna.
c) Dibetiya ku goka yekem zer û ya duyem reş be, bibîne.
d) Her du bûyerên ku goka yekem zer û ya duyem reş, serbixwe ne yan na?

4) Di tecrubeya avêtina 3 diravên kanzayî de, A bûyera ku tenê wêneyek li jor be, B bûyera ku tenê 2 nivîs li jor bin. Her du bûyer serbixwe ne yan na?

FONKSIYONA NENASÊ DIBETIYÊ

Dema ku em diravekî kanzayî 3 carên li pey hev bavêjin, encamên tecrubeyê dê bi vî awayî bin:

$\Omega = \{(W,W,W),(N,W,W),(W,N,W),(W,W,N),$
$(N,W,N),(N,N,W),(W,N,N),(N,N,N)\}$ (W wêne, N nivîs)

Eger bê zanîn ku $\boldsymbol{X}$ hejmara diyarbûna wêne di her sê caran de ye, wê demê:

Dema ku $A = \{(W,W,W)\}$ be, nirxê $\boldsymbol{X}$ yeksanî 3 ye ango $\{\boldsymbol{X} = \mathbf{3}\}$

Dema ku $B = \{(N,W,W),(W,N,W),(W,W,N)\}$ be, nirxê $\boldsymbol{X}$ yeksanî 2 ye ango $\{\boldsymbol{X} = \mathbf{2}\}$

Dema ku $C = \{(N,N,W),(W,N,N),(N,W,N)\}$ be, nirxê $\boldsymbol{X}$ yeksanî 1 e ango $\{\boldsymbol{X} = \mathbf{1}\}$

Dema ku $D = \{(N,N,N)\}$ be, nirxê $\boldsymbol{X}$ yeksanî 0 e ango $\{\boldsymbol{X} = \mathbf{0}\}$

$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ komika nirxên X e.

Eger $(\Omega, P(\Omega), P)$ fezaya dibetiya bi dawî be, ji fonksiyona

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ re, **fonksiyona nenasê dibetiyê** tê gotin û $X(\Omega)$ komika nirxên wê ye.

Eger r yek ji nirxên X be, wê demê $\{X = r\}$ komika bûyerên sade ya ku nirxê X dike r .

Mînak:

Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de careke tenê, X fonksiyona nenasê dibetiyê ya ku komkirina hejmarên li ser her du berikan nîşan dide.

1) Komika nirxên X bibîne.
2) $\{X = 3\}$ çi nîşan dide? Dibetiya wê bibîne.
3) $\{X = 7\}$ çi nîşan dide? Dibetiya wê bibîne

Çareserî:

1) $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
2) Nirxê X yeksanî 3 ye, ango komkirina hejmarên li ser her du berikan yeksanî 3 ye. $\{X = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ dibetiya wê jî $P(\{X = 3\}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
3) Nirxê X yeksanî 7 e, ango komkirina hejmarên li ser her du berikan yeksanî 7 e.
$\{X = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ dibetiya wê jî
$P(\{X = 7\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Zagona dibetiyê ya fonksiyona nenasê dibetiyê

Eger $(\Omega, P(\Omega), P)$ fezaya dibetiya bi dawî be, X fonksiyona nenasê dibetiyê û komika nirxên wê $X(\Omega) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ be.

Em ji $f_X: X(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}: r \longmapsto f_X(r) = P(X = r)$ re dibêjin **zagona dibetiyê ya fonksiyona nenasê dibetiyê**.

Eger hejmara endamên $X(\Omega)$ biçûk be, em f_X di tabloyeke wek ya li jêr de xêz bikin.

$\boldsymbol{r_i}$	r_1	r_2	....	r_n
$\boldsymbol{f_X(r_i)}$	$f_X(r_1)$	$f_X(r_2)$	....	$f_X(r_n)$

Têbînî:

1) Nirxên $\boldsymbol{f_X}$ yeksanî 1 in.
2) $f_X(r_1) + f_X(r_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_X(r_n) = 1$
3) Em dikarin f ji berdêla f_X binivîsin.

Texmîna bîrkarî

Eger $(\Omega, P(\Omega), P)$ fezaya dibetiya bi dawî be, X fonksiyona nenasê dibetiyê û komika nirxên wê $X(\Omega) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ be.

Em ji ya li jêr re dibêjin **Texmîna bîrkarî**

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \,.\, P(X = r_k) = r_1 . f_X(r_1) + r_2 . f_X(r_2) + \cdots + r_n . f_X(r_n)$$

Mînak 1:

Di sindoqekê de 3 gokên spî û 2 gokên reş hene, me 3 gok bi hev re derxistin. Eger X fonksiyona hejmara gokên reş di nav yên derxistî de nîşan bike.

a) komika nirxên X bibîne.
b) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike
c) Texmîna bîrkarî bibîne.

Çareserî:

a) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
Bûyera $\{X = 0\}$ ya derxistina 3 gokên spî, 0 gokên reş e, li gorî vê; $f(0) = \frac{C(3,3)}{C(5,3)} = \frac{1}{10}$
Bûyera $\{X = 1\}$ ya derxistina 2 gokên spî, 1 gok reş e, li gorî vê; $f(1) = \frac{C(3,2).C(2,1)}{C(5,3)} = \frac{6}{10}$
Bûyera $\{X = 2\}$ ya derxistina 1 gok spî, 2 gokên reş e, li gorî vê; $f(2) = \frac{C(3,1).C(2,2)}{C(5,3)} = \frac{3}{10}$

b) Tabloya zagona dibetiyê

r_i	0	1	2
$f(r_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

c) Texmîna bîrkarî

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{3} r_k \,.\, f(r_k) = 0 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Mînak 2:

Di sindoqekê de 3 gokên bi hejmarên 1, 2 û 3 nîşankirî hene, me 2 gok li pey hev û biveger kişandin. Eger X fonksiyona komkirina hejmarên li ser her du gokan be.

d) komika nirxên X bibîne.
e) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike
f) Texmîna bîrkarî bibîne.

Çareserî:

d) $\Omega = \{(i,j)\ 1 \leq i,\ j \leq 3\}$
$X(\Omega) = \{2,3,4,5,6\}$
e) Taboya zagona dibetiyê
Em tabloya li jêr dagirin

$\boldsymbol{k}$	$\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}\}$	$\boldsymbol{f_X(k)}$
2	$\{(1,1)\}$	$\frac{1}{9}$
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\frac{2}{9}$
4	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\frac{3}{9}$
5	$\{(2,3),(3,2)\}$	$\frac{2}{9}$
6	$\{(3,3)\}$	$\frac{1}{9}$

Û li gorî vê em zagona dibetiyê binivîsin.

$\boldsymbol{r_k}$	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{f_X(r_k)}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

f) Texmîna bîrkarî

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{k=1}^{n} r_k \,.\, f(r_k) = \frac{1}{9}(2+6+12+10+6) = 4$$

Mînak 3:

Di sindoqekê de 6 kartên bi hejmarên 1, 2, 3, 4, 5 û 6 nîşankirî hene, me 2 kart li pey hev û bêveger kişandin. Eger X fonksiyona hejmara mezin di navbera her du kartan de nîşan bike.

a) komika nirxên X bibîne.
b) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike
c) Texmîna bîrkarî bibîne.

Çareserî:

a) $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Tabloya zagona dibetiyê
Dema ku hejmara karta yekem yeksanî $\boldsymbol{k}$ be, bûyera $\{X = k\}$ pêk tê û hejmara karta duyem di navbera $\{1, 2, \dots, k-1\}$ de ye, yan jî hejmara karta yekem di navbera $\{1, 2, \dots, k-1\}$ de û ya duyem $\boldsymbol{k}$ ye, li gorî vê;
$\boldsymbol{f_X(k) = P(X = k)} = \frac{2(k-1)}{6\times 5} = \frac{\mathrm{k}-1}{15}$

$\boldsymbol{k}$	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{f_X(k)}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

c) Texmîna bîrkarî

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{15}(2+6+12+20+30) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

Mînak 4:

Di sindoqekê de 6 kartên bi hejmarên 1, 2, 3, 4, 5 û 6 nîşankirî hene.

1) Me 2 kart bi hev re kişandin. Eger X fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du kartan nîşan bike.
   a) Komika nirxên X bibîne.
   b) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike

2) Me du kart li pey hev û biveger kişandin. Eger Y fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du kartan nîşan bike.

   a) Komika nirxên Y bibîne.

b) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike

Çareserî:

1)

a) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

b) Tabloya zagona dibetiyê

Em destpêkê tabloyeke alîkar xêz bikin.

+	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2			5	6	7	8
3				7	8	9
4					9	10
5						11
6						

r_k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_X(r_k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

2)

a) $Y(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) Tabloya zagona dibetiyê

Em destpêkê tabloyeke alîkar xêz bikin.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8

3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

r_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(r_k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Hînkirin:

1) Di sindoqekê de neh kartên bi hejmarên 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 nîşankirî hene. Me sê kart bi hev re kişandin. Eger X fonksiyona komkirina her sê hejmarên li ser her sê kartan nîşan bike. Nirxên X û texmîna bîrkarî bibîne.

2) Lorînê diravekî kanzayî sê caran tavêje. Eger her sê car nivîs li jor be; 12 pileyan bidest dixe, eger du caran nivîs li jor be; 4 pileyan bidest dixe, ji bilî van; 6 pileyan winda dike. Eger X fonksiyona hejmara pileyên ku Lorîn bidest dixe, nîşan dike. Nirxên X û texmîna bîrakarî bibîne.

PIRSÊN BEŞA ŞEŞEM

1) Di sindoqekê de 4 gokên spî û 6 gokên reş hene, me 3 gok li pey hev bêvegr derxistin.

a) Dibetiya ku herî kêm du gokên spî bin bibîne.

b) Eger X fonksiyona hejmara gokên spî di nav yên derxistî de nîşan bike. komika nirxên X bibîne, tabloya zagona dibetiyê xêz bike û Texmîna bîrkarî bibîne.

2) Di sindoqekê de 9 gokên ji bilî reng wek hev hene (2 sor û 3 spî û 4şîn) me 2 gok bi hev re derxistin.

a) Dibetiya ku her du gok spî bin bibîne.

b) Dibetiya ku her du gok ji heman rengî bin bibîne.

c) Dibetiya ku rengê her du gokan ne wek hev bin bibîne.

d) Eger me goka spî bi hejmara (1) nîşan kir û goka şîn bi hejmare (2) nîşan kir û goka sor bi hejmara (0) nîşan kir. Eger X fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du gokên hatî derxistin be, komika nirxên X bibîne, tabloya zagona dibetiyê xêz bike û texmîna bîrkarî bibîne.

3) Di sindoqekê de 8 kartên bi hejmarên 0, 0, 2, 2, 3 ,3 ,3 û 3 nîşankirî hene. Me du kart li pey hev û bêveger kişandin

a) Eger bê zanîn ku komkirina hejmarên her duyan ji 4 mzintir e, dibetiya ku komkirina hejmarên her duyan cot be, bibîne.

b) Eger bê zanîn ku hejmarên her duyan ne wek hev in, dibetiya ku komkirina hejmarên her duyan cot bin, bibîne.

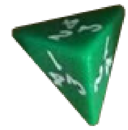
c) Eger Y fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du kartan nîşan bike. Komika nirxên Y bibîne, tabloya zagona dibetiyê xêz bike û texmîna bîrkarî bibîne.

4) Di sindoqekê de 8 kartên bi hejmarên 0, 0, 0, 1, 1 ,2 ,2 û 2 nîşankirî hene. Me du kart li pey hev û biveger kişandin

a) Eger bê zanîn ku komkirina hejmarên her duyan ji 2 mzintir e, dibetiya ku hejmara li ser yekê ji wan 1 be, bibîne.

b) Eger X fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du kartan nîşan bike, komika nirxên Y bibîne, tabloya zagona dibetiyê xêz bike û Texmîna bîrkarî bibîne.

5) Di tecrubeya avêtina berika zarê de ku tenê çar rûyên wê hene careke tenê, p_i dibetiya ku hejmara i li jêr be $i \in \{1,2,3,4\}$.



Eger $p_2 = \frac{1}{5}$ be û p_1, p_2, p_3, p_4 pêkhateyên peyhatiyeke hejmarî bin ku bi rêzê ne.

a) p_1 , p_3, p_4 bibîne.

b) Dibetiya ku hejmara kit li jêr be bibîne.

6) Di sindoqekê de 6 kartên bi hejmarên tekane yên destpêkê nîşankirî ne. Me du kart bi hev re kişandin.

Eger X fonksiyona komkirina her du hejmarên li ser her du kartan nîşan bike.

a) Komika nirxên Y bibîne.

b) Tabloya zagona dibetiyê xêz bike.

c) Texmîna bîrkarî bibîne.

7) Di kargeha çêkirina lempeyan de sê xet hene A , B û C

Xeta A %20 ji berheman çêdike û %5 ji wan xerabe ne.

Xeta B %30 ji berheman çêdike û %4 ji wan xerabe ne.

Xeta C %50 ji berheman çêdike û %1 ji wan xerabe ne.

me lempeyek ji nav berheman derxist.

a) Dibetiya ku lempe xerabe be û ji xeta A be bibîne.

b) Dibetiya ku lempe xerabe be û ji xeta B be bibîne.

a) Dibetiya ku lempe xerabe be û ji xeta C be bibîne.

BEŞA HEFTEM

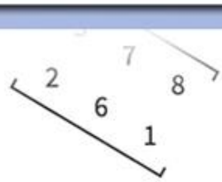
MATRÎS

1) Matrîs
2) Çareserkirina hevkêşeyan

Hevdana du matrîsan

(1)
$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&5\\6&7\\1&8\end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&5\\6&7\\1&8\end{bmatrix}$$

(3)


$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\times$$

(4)
$$\begin{array}{c}\begin{matrix}5&7&8\\2&6&1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\end{array}=$$

(5)
$$\begin{array}{c}\begin{matrix}5&7&8\\2&6&1\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}\quad&\quad\\&\\&\end{bmatrix}$$

(6)
$$\begin{array}{c}\begin{matrix}5&7&8\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1\times2+2\times6+1\times1\\0\quad1\quad0\\2\quad3\quad4\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}15&\\&\\&\end{bmatrix}$$

(7)
$$\begin{bmatrix}1\times5+2\times7+1\times8\\0\times2+1\times6+0\times1\\2\quad3\quad4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&27\\6&\\&\end{bmatrix}$$

(8)
$$\begin{bmatrix}1\quad2\quad1\\0\times5+1\times7+0\times8\\2\times2+3\times6+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&27\\6&7\\26&\end{bmatrix}$$

(9)
$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1\quad2\quad1\\0\quad1\quad0\\2\times5+3\times7+4\times8\end{bmatrix}\\\begin{matrix}2&6&1\end{matrix}\end{array}\times\begin{bmatrix}15&27\\6&7\\26&63\end{bmatrix}$$

(10)
$$\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&3&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&5\\6&7\\1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&27\\6&7\\26&63\end{bmatrix}$$

MATRÎS

Matrîs: agahiyên zanistî yan jî birkarî di navbera du kevanan de bi awayê stûn û rêzan tên komkirin.

Guhertinên di matrîsê de

Di matrîsa li jêr de:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Guhertin bi sê awayan çêdibe:

1) Heguhertina du rêzan, sembola wê jî ev e: $\boldsymbol{R_j \leftrightarrow R_i}$
2) Hevdana rêzekê bi hejmarekê re, sembola wê jî ev e: $\boldsymbol{kR_j \rightarrow R_j}$
3) Hevdana rêza $\boldsymbol{R_j}$ bi hejmara $\boldsymbol{k}$ re û komkirina encamê bi rêza $\boldsymbol{R_i}$ re û di rêza $\boldsymbol{R_i}$ de bi cih kirin, sombola wê jî bi vî awayî ye $\boldsymbol{kR_j + R_i \rightarrow R_i}$

Mînak:

Di matrîsa li jêr de:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hevguhertina rêza yekem bi ya duyem re $R_1 \leftrightarrow R_2$ encam bi vî awayî çêdibe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hevdana rêza yekem bi hejmara 2 re $2R_1 \rightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Hevdana rêza yekem bi hejmara 2 re û komkirina encamê bi rêza duyem re û di rêza duyem de bi cih kirin $kR_1 + R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 10 & 9 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Wekheviya matrîsan

Eger A, B du matrîs bin, di encama bikaranîna çend guhertinan; yek ji wan dibe wek ya din, ji her duyan re matrîsên wekhev tê gotin û sembola wê jî ev e: $A \sim B$

Mînak:

Di matrîsa li jêr de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hevguhertina rêza yekem bi ya duyem re $R_1 \leftrightarrow R_3$ encam bi vî awayî çêdibe:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \to \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bi pêkanîna guhertina $R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to R_3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \to \quad A \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Bi pêkanîna guhertina $2R_3 \to R_3$ li encama jor.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \to \quad A \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrîsa rêzkirî

1) **Endamê yekem**, endamê destpêkê yê ne sifir di rêzekê de ye.
2) **Rêza sifir**, rêza ku endamên wê bi tevahî sifir bin.
3) **Matrîsa rêzkirî**, matrîseke her du mercên li jêr pêk tîne:
   a) Endamê yekem di her rêzê de, li aliyê rastê yê endamê yekem di rêza berî wê de ye.
   b) rêzên sifir (eger hebin) piştî rêzên nesifir tên.

Mînak:

Matrîsa li jêr, matrîseke rêzkirî ye.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 1, 2, 2 endamên yekem in.

Matrîsa li jêr, matrîseke ne rêzkirî ye.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ ji ber ku rêza sifir berî rêza nesifir hatiye.

Matrîsa li jêr, matrîseke ne rêzkirî ye.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ ji ber ku endamê yekem di rêza sêyem de ne li aliyê rastê yê endamê yekem di rêza duyem de ye.

Teorî:

Her matrîsa A, herî kêm matrîseke rêzkirî jê çêdibe.

Mînak:

Matrîsa rêzkirî ji matrîsa A re bibîne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

Çareserî:

Em guhertinên $R_2 - 3R_1 \to R_2$ û $R_3 + 2R_1 \to R_3$ pêk bînin:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Piştire em guhertina $\frac{1}{2}R_2 \to R_2$ pêk bînin:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Piştire em guhertina $R_3 - 5R_2 \to R_3$ pêk bînin:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix} = B$$

B matrîseke rêzkirî ye.

Hînkirin:

Matrîsên rêzkirî ji matrîsên jêr pêk bîne.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇARESERKIRINA HEVKÊŞEYAN

Hevkêşeyên xêz

Her rasteka ku di kordînatê de were xêzkirin; em dikarin bi vî awayî binivîsin:

$a_1 x + a_2 y = b$; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ û a_1, a_2 bi hev re ne sifir in.

Ji hevkêşeya jor re, **hevkêşeya xêz** tê gotin.

Bi giştî hevkêşeya xêz bi vî awayî tê nivîsandin:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$; $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b \in \mathbb{R}$

Ji a_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ re qatjimarên hevkêşeyê û b pêkhateya neguhêr tê gotin.

Hevkêşeyên ku logarîtma, sêgoşeyî û bi hêz di nav de nebin, fonksiyonên xêz in.

Mînak:

Fonksiyonên li jêr, fonksiyonên xêz in.

$x + 3y = 7$, $y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$, $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

Lê hevkêşeyên ku logarîtma, sêgoşeyî û bi hêz di nav hebin, ne fonksiyonên xêz in.

Fonksiyonên li jêr, ne fonksiyonên xêz in.

$x + 3\sqrt{y} = 5$, $3x + 2y - z + xz = 4$, $y = \sin x$

Çareseriya hevkêşeya xêz

Hevkêşeya bi awayê $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$, çareseriya wê rêzehejmarên $S_1, S_1, \ldots S_n$ li gorî ku $x_1 = S_1, x_2 = S_1, \ldots x_n = S_n$ ye.

Mînak:

Çareseriyên hevkêşeyên li jêr bibîne.

a) $4x - 2y = 1$

b) $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$

Çareserî:

a) Ji bo çareseriyê, em ê nirxekî dîmen ji bo x bibînin û li gorî wê nirxê y bibînin.
Dema $x = t$ wê demê $y = 2t - \frac{1}{2}$

b) Ji bo çareseriyê, em ê nirxekî dîmen ji bo x_2, x_3 bibînin û li gorî wê nirxê x_1 bibînin.
Dema $x_2 = S, x_3 = t$ wê demê $x_1 = 5 + 4S - 7t$

Sîstema xêz

Ji komika nenasên $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ re, **sîstema hevkêşeyên xêz an jî sîstema xêz** tê gotin, eger rêzehejmarên $S_1, S_2, \ldots\ S_n$ vî mercî pêk bînin $x_1 = S_1, x_2 = S_2, \ldots\ x_n = S_n$ wê demê ji wan re **çareseriya hevkêşeyên sîstemê** tê gotin.

Mînak:

Eger du hevkêşe hebin:

$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$

$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$

Çareseriya van her du hevkêşeyan $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$ e, lê $x_1 = 1,\ x_2 = 8,\ x_3 = 1$ ne çareserî ye ji her du hevkêşeyan re, ji ber ku tenê ya yekem çareser dike.

Carinan çareserî ji hevkêşeyan re nîne.

Mînak:

Her du hevkêşeyên li jêr:

$x + y = 4$

$2x + 2y = 6$

Em her du aliyên hevkêşeya duyem hevdanî $\frac{1}{2}$ bikin:

$x + y = 4$

$x + y = 3$

Tê dîtin ku çareserî ji her duyan re nîne.

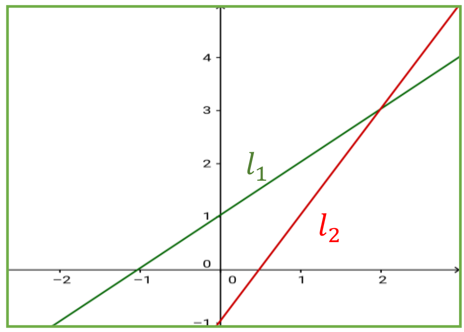
Bi awayekî giştî hevkêşeyên bi awayên li jêr:

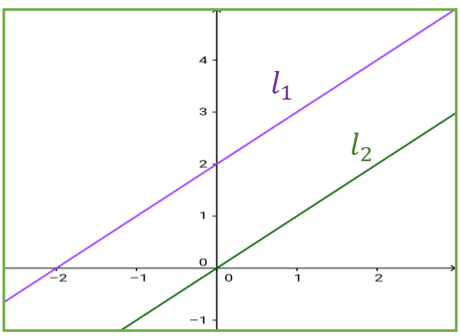
$a_1x - b_1y = c_1$ $(a_1, b_1$ bi hev re ne sifir in)

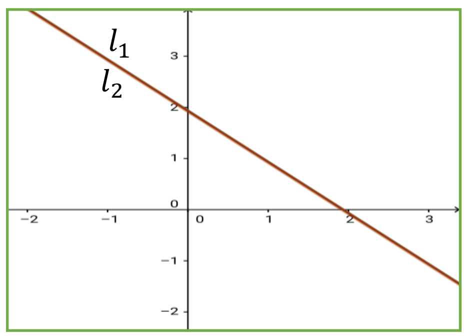
$a_2x - b_2y = c_2$ $(a_2, b_2$ bi hev re ne sifir in)

Girafîka wan l_1, l_2 di kordînatê de xêz in, sê rewşên wan hene, di girafîkên jêr de tên diyarkirin:

Çareseriyeke tenê ji her du girafîkên l_1, l_2 re heye.







Tu çareserî nînin. Hejmarek bê dawî çareserî hene.

Bi giştî sîstema (I) ya ku bi m hevkêşeyên xêz û n nenas be, bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_n + & \dots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{matrix}$$

Li gorî ku x_1, x_2, x_3 nenas in, a, b hejmarên neguhêr in.

Têbînî:

Em dikarin sîstema $(\boldsymbol{I})$ bi vî awayî jî binivîsin

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \quad . \; X \; = \; B$$

A matrîsa ji pileya $m{\times}n$ ya qatjimara sîstema $(\boldsymbol{I})$ ye.

X matrîseke stûnî ya nenasên sîstema $(\boldsymbol{I})$ ye.

B matrîseke stûnî ya pêkhateyên neguhêr ya sîstema $(\boldsymbol{I})$ ye.

Jê re **awayê matrîsê ya sîstema $(\boldsymbol{I})$** tê gotin û bi vî awayî tê nivîsandin $A.X = B$

Her sîstema $(\boldsymbol{I})$ matrîsa wê ya berfireh $H = [A \;\; \vdots \;\; B]$ heye.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

Mînak 1:

Hevkêşeyên li jêr di matrîsa berfireh de bi cih bike.

$5x + y = 3$

$2x - y = 4$

Çareserî:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Mînak 2:

Hevkêşeyên li jêr di matrîsa berfireh de bi cih bike.

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Çareserî:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & 1 \\ 3 & 6 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Karanînên matrîsan

Em dikarin hevkêşeyan bi riya matrîsan çareser bikin.

Mînak:

Hevkêşeyên li jêr çarese bike.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Çareserî:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Em (-2)hevdanî hevkêşeya yekem bikin û encamê bi ya duyem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Em (-3)hevdanî hevkêşeya yekem bikin û encamê bi ya sêyem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2y - 7z &= -17 \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Em hevkêşeya duyem hevdanî $(\frac{1}{2})$ bikin:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ 3y - 11z &= -27 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Em (-3) hevdanî hevkêşeya duyem bikin û encamê bi ya sêyem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{2}z &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Em hevkêşeya sêyem hevdanî (-2) bikin:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em (-1) hevdanî hevkêşeya duyem bikin û encamê bi ya yekem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x + \frac{11}{2}z &= \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em $(-\frac{11}{2})$ hevdanî hevkêşeya sêyem bikin û encamê bi ya yekem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y - \frac{7}{2}z &= -\frac{17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em $(\frac{7}{2})$ hevdanî hevkêşeya sêyem bikin û encamê bi ya duyem re kom bikin:

$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \qquad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sîstema homojen û ya nehomojen

Sîstema homojen

Sîstemeke ji hevkêşeyên xêz ku pêkhateya wê ya neguhêr sifir e, ango matrîsa pêkhateyên neguhêr $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ û hevkêşeya wê ya matrîsê bi vî awayî ye $A.X = 0$,
matrîsa wê ya berfireh jî ev e $H = [A \quad \vdots \quad 0]$

Sîstema nehomojen

Sîstemeke ji hevkêşeyên xêz ku pêkhateya wê ya neguhêr ne sifir e, ango matrîsa pêkhateyên neguhêr $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ û hevkêşeya wê ya matrîsê bi vî awayî ye $A.X = B$,
matrîsa wê ya berfireh jî ev e $H = [A \quad \vdots \quad B]$

Teorî 1: (sîstem nehomojen e)

Eger $\boldsymbol{I}$ sîstemek be hejmara hevkêşeyên wê m, hejmara nenasan n û matrîsa wê ya berfireh $H = [A \quad \vdots \quad B]$ be.

- Em matrîsa berfireh li awayê rêzkirî ya matrîsa qatjimaran vegerînin.
- Eger di matrîseke rêzkirî $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{r}$ hejmara endamên yekem be.
- Eger di matrîseke berfireh $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{r'}$ hejmara endamên yekem be, li gorî ku $\boldsymbol{r'} \geq \boldsymbol{r}$

Wê demê sê rewş hene;

1) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} = \boldsymbol{n}$ çareseriyeke tenê ya sîstemê heye.
2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} < \boldsymbol{n}$ hejmarek bê dawî çareseriyên sîstemê hene.
3) $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r'}$ sîstem çareser nabe.

Teorî 2: (sîstem homojen e)

Eger $\boldsymbol{I}$ sîstemek be hejmara hevkêşeyên wê m, hejmara nenasan n û matrîsa wê ya berfireh $H = [A \;\; \vdots \;\; 0]$ be.

Li gorî teoriya yekem her tim $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$ û li gorî vê, tenê du rewş hene;

1) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ çareseriyeke tenê ya sîstemê heye ew jî ev e; $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ jê re **çareseriya sifir** tê gotin
2) $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$ hejmarek bê dawî çareseriyên sîstemê hene û hejmara nenasên wê $n - \boldsymbol{r}$ ye.

Têbînî:

1) Çareseriya sîstema homojen her tim heye, ji ber ku $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ çareseriya wê ye.
2) Eger hejmara hevkêşeyan $\boldsymbol{m}$ ji hejmara nenasan $\boldsymbol{n}$ biçûktir be, wê demê hejmarek bê dawî ji çeareseriyan heye.

Mînak 1:

Hejmara çareseriyên sîstema $\begin{cases} 4x - y + 3z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ bê dawî ye, ji ber ku hejmara hevkêşeyan $m = 2$ biçûktir e ji hejmara nenasan $n = 3$

Mînak 2:

Sîstema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - 1y + 2z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$ tenê çareseriyke wê heye.

Matrîsa qatjimaran ev e $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Em guhertina $R_1 \leftrightarrow R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ çêkin.

Em guhertinên $-3R_1 + R_2 \to R_2$ û $-2R_1 + R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ çêkin.

Em guhertina $\frac{1}{5}R_2 \to R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -9 \end{bmatrix}$ çêkin.

Em guhertina $-7R_2 + R_3 \to R_3$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ çêkin.

Em dibînin ku $r = n = 3$ û li gorî vê çareseriyeke tenê ya sîstemê heye ew jî çarseriya sifir e.

Awayê Gaus di çareserkirina hevkêşeyên xêz $A.X = B$

Eger $\boldsymbol{I}$ sîstemek be hejmara hevkêşeyên wê m, hejmara nenasan n û matrîsa wê ya berfireh $H = [A \; \vdots \; B]$ be.

- Em matrîsa berfireh $H = [A \; \vdots \; B]$ vegerînin li ya rêzkirî H'
- Eger di matrîseke rêzkirî $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{r}$ hejmara endamên yekem be.
- Eger di matrîsa $\boldsymbol{H'}$ de $\boldsymbol{r'}$ hejmara endamên yekem be,

Li gorî van;

1) $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r'}$ Di matrîsê de rêzeke bi awayê $0 = \boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0})$ diyar dibe û sîstem çareser nabe
2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'}$ wê demê em sîstema hevkêşeyên matrîsa berfireh $\boldsymbol{H'}$ dinivîsin, em encama sîstema hevkêşeyan bi riya bicihkirinê ji jêr ber bi jor ve çareser bikin, du rewş hene;
   a) Dema ku $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} = \boldsymbol{n}$ çareseriyeke tenê ya sîstemê heye
   b) Lê dema ku $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} < \boldsymbol{n}$ hejmarek bê dawî ji çareseriyan heye.

Mînak 1:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$x + 2y + 3z = 9$

$2x - y + z = 8$

$3x - z = 3$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-2R_1 + R_2 \to R_2$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & 5 & \vdots & -10 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-3R_1 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & 5 & \vdots & -10 \\ 0 & -6 & -10 & \vdots & -24 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $\frac{-1}{5}R_2 \to R_2$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -6 & -10 & \vdots & -24 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $6R_2 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -4 & \vdots & -12 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $\frac{-1}{4}R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Wek em dibînin ku $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{n}$ çareseriyeke tenê ya sîstemê heye

$x + 2y + 3z = 9$

$y + z = 2$

$z = 3$

Em nirxê z di hevkêşeya duyem de bicih bikin $y + 3 = 2 \Rightarrow y = -1$

Piştre em nirxê y û z di hevkêşeya yekyem de bicih bikin

$x + 2(-1) + 3(3) = 9 \Rightarrow z = 3$

$x = 2$, $y = -1$, $z = 3$ çareseriya her sê hevkêşeyan e.

Mînak 2:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$x + 2y + 3z = 6$

$2x - 3y + 2z = 14$

$3x + y - z = -2$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Em karanînên li jêr pêk bînin:

$$-2R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-3R_1 + R_3 \to R_3 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{-1}{5} R_2 \to R_2 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$7R_2 + R_3 \to R_3 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{10} R_3 \to R_3 \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$x + 2y + 3z = 6 \Longrightarrow x - 4 + 9 = 6 \Longrightarrow x = 1$

$y + 2z = 4 \Longrightarrow y = -6 + 4 = -2$

$z = 3$

$x = 1,\ \ y = -2,\ \ z = 3$ çareseriya her sê hevkêşeyan e.

Mînak 3:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$x + y + z = 1$

$2x - 2y - 2z = 3$

$2x + y + z = 3$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & -2 & -2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -4 & -4 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -4 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $R_2 \leftrightarrow R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & -4 & -4 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-4R_2 + R_3 \rightarrow R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 17 \end{bmatrix}$$

Wek em dibînin ku $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}\,, \boldsymbol{r'} = \mathbf{3}$ û hevkêşe bi awayê $0 = \mathbf{17}$ ango çareseriya sîstemê nîne.

Mînak 4:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$x + y + z = 5$

$2x - 2y + 3z = 4$

$3x - y + 4z = 9$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 2 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 3 & -1 & 4 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-2R_1 + R_2 \to R_2$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & -6 \\ 3 & -1 & 4 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-3R_1 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-R_2 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -4 & 1 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Wek em dibînin ku $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r'} = \mathbf{2}$ û $\boldsymbol{n} = \mathbf{3}$ hejmarek bê dawî çareseriyên sîstemê hene.

$x + y + z = 5$ (1)

$-4y + z = -6$ (2)

Em ya (2) bi riya bicihkirinê bi nîşana nenasê $\boldsymbol{y}$ çareser bikin.

$z = 4y - 6$ em di (1) de bi cih bikin $x = -5y + 11$

Komika çareseriyan ev e;

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -5y + 11, z = 4y - 6\}$

$= \{(-5y + 11\,, y\,, 4y - 6) : y \in \mathbb{R}\}$

Mînak 5:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$x + 2y = 0$

$2x - y = 0$

$x + y = 0$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna$R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ û $R_2 - 2R_2 \rightarrow R_2$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wek em dibînin ku $\boldsymbol{r = n = 2}$ çareseriyeke tenê ya sîstemê heye, ew jî çareseriya sifir e, $\boldsymbol{x = 0}$ û $\boldsymbol{y = 0}$

Mînak 6:

Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

$3x + 4y - z = 0$

$2x + y + z = 0$

$x + 4y - 3z = 0$

Çareserî:

Destpêkê em matrîsê binivîsin.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $R_1 \leftrightarrow R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & 4 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna$-2R_1 + R_3 \to R_3$ û $-3R_1 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -7 & 7 & \vdots & 0 \\ 0 & -8 & 8 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna $-\frac{1}{7}R_2 \to R_2$ û $-\frac{1}{8}R_3 \to R_3$pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Em karanîna$-R_2 + R_3 \to R_3$ pêk bînin:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Wek em dibînin ku $\boldsymbol{r} = \mathbf{2} < \boldsymbol{n}$ hejmarek bê dawî çareseriyên sîstemê hene.

$x + 4y - 3z = 0$ (1)

$y - z = 0$ (2)

Em ya (2) bi riya bicihkirinê bi nîşana nenasê z çareser bikin.

$y = z$ em di (1) de bi cih bikin $x = -z$

Komika çareseriyan ev e;

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z, y = z\}$$

$$= \{(-z, z, z) \in \mathbb{R}\}$$

Hînkirin:

Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 7x - 9y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 4y = 8 \\ 2x - 7y = 11 \\ 3x - 13y = 24 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases}$

PIRSÊN BEŞA HEFTEM

1) Matrîsên rêzkirî ji matrîsên jêr pêk bîne.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 6\\ 2 & -2 & -4\\ 3 & 12 & 15\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2 & 19\\ 2 & -1 & -2 & -1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & -4 & 5\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0 & 8 & 6\\ 4 & 0 & 6 & 12 & 8\\ 4 & 5 & 6 & -5 & -1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 3 & -2 & 6\\ 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

2) Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

a)
$$\begin{aligned}4x+3y&=-6\\ 5x-y&=2\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}x+y+z&=1\\ 2x-2y-2z&=14\\ 2x+y+z&=-2\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}x+y+2z+3w&=13\\ 2x-2y+z+w&=14\\ 3x+y+z-w&=-2\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}x+y+z&=6\\ 3x+2y-z&=4\\ 3x+y+2z&=11\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}x-y+3w&=1\\ 4x-6y+5z&=-2\\ 6x-y+4z&=-1\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}3x-4y-2z&=5\\ x+y+2z&=8\end{aligned}$$

3) Hevkêşeyên li jêr li gorî awayê Gaus çareser bike.

a)
$$\begin{aligned}x+y&=2\\ 5x+6y&=9\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x - 3y &= -3 \\ 2x - 5y &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + 3y + z &= 4 \\ 2x + 2y + z &= -1 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 4 \\ 3x + 3y + 2z &= 2 \\ y + z &= 5 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ x + 4y + 4z + w &= 10 \\ 3x + 7y + 9z + w &= 4 \\ -2x - 4y - 6z + w &= 6 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 3x + y + 4z &= 0 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \\ 4x - 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

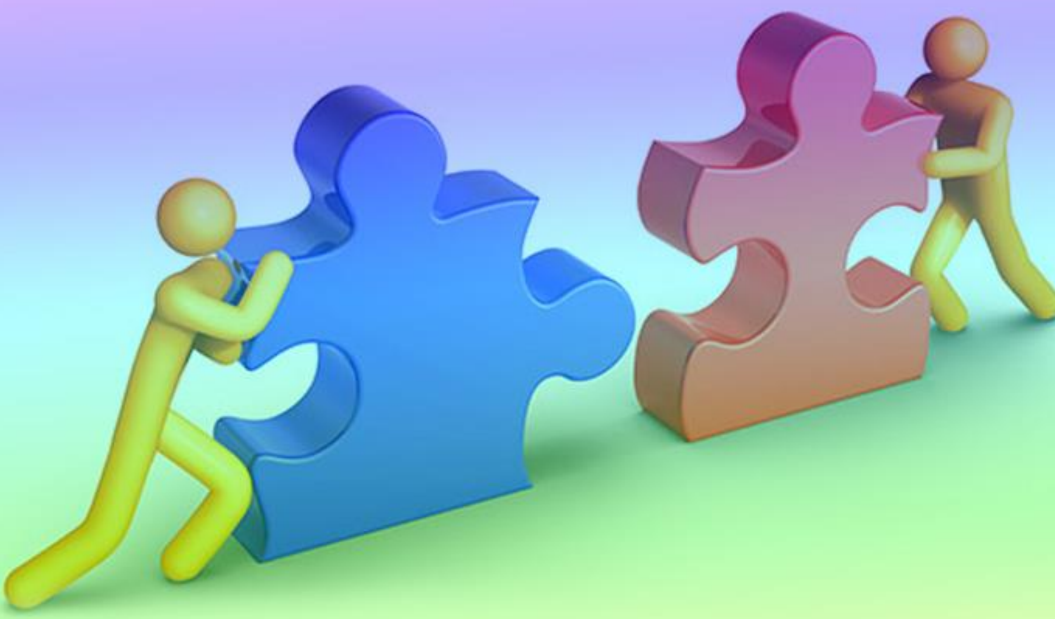
i) $$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ 3x + 4z &= 0 \\ 6z - y &= 0 \end{aligned}$$

4) Komkirina temenê du zarokan yeksanî temenê dayika wan e, berî 14 salan komkirina temenê her du zarokan yeksanî nîvê temenê dayikê bû. Eger yek ji zarokan bi du salan ji yê din biçûktir be, temenê her du zarokan û dayika wan bibîne.

BEŞA HEŞTEM

HEJMARÊN KOMPLEKS

1) Analîza pir pêkhate
2) Girafîka hejmarên kompleks
3) Hejmarên kompleks awayê bihêz

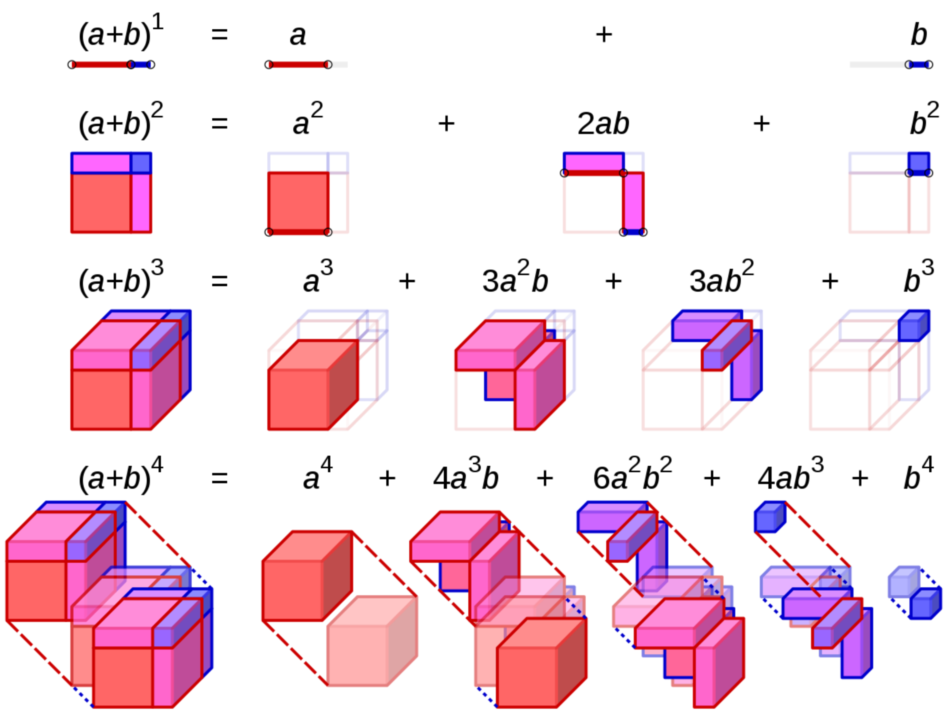


Zagona dupêkhate ya Newton

Newton ji bo vekirina pirpêkhateya ji hêza n ber bi komkirinê ve nivîsandiye.

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Mînak:



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

ANALÎZA PIR PÊKHATE

Destpêkê em komkia hejmarên kompleks bibîr bînin.

Hejmarên kompleks bi vî awayî tên naskirin:

$\mathbb{C} = \{z = a + bi \ : \ a \in \mathbb{R}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$

a : Beşa rast e, sembola wê $R_e(\mathrm{Z})$ ye.

bi : Beşa dîmen e, sembola wê $I_m(\mathrm{Z})$ ye.

Sembola komika hejmarên kompleks $\mathbb{C}$ ye.

Hêzên i

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$

Bi awayekî giştî: $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i : n \in \mathbb{N}$

Hevjimarê hejmara kompleks

Eger $z = x + iy$ hejmara kompleks be wê demê $\bar{z} = x - iy$ hevjimara wê ye, li gorî vê:

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Mînak:

Eger $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - i$ du hejmarên kompleks bin.

1) $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1.z_2$ bibîne.
2) Tekez bike ku $\overline{z_1} = z_2$ û $\frac{z_1}{z_2}$ bibîne.
3) $|z_1|$ û $|z_2|$ bibîne.

Çareserî:

1) $z_1 + z_2 = (3 + i) + (3 - i) = 6$
$z_1 - z_2 = (3 + i) - (3 - i) = 2i$
$z_1.z_2 = (3 + i).(3 - i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 10$

2) $z_1 = 3 + i \Longrightarrow \overline{z_1} = 3 - i = z_2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i}{3 - i} = \frac{(3 + i)^2}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{(3 + i)^2}{10} = \frac{9 - 1 + 6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

3) $\left.\begin{matrix}|z_1|=\sqrt{10}\\|z_2|=\sqrt{10}\end{matrix}\right\}$ $\Longrightarrow$ $|z_1| = |z_2|$ wek tê dîtin dirêjahiya her du hejmarên hevjimar heman e.

Têbînî:

a) Eger $\bar{z} = z$ wê demê z hejmareke rast e.
b) Eger $\bar{z} = -z$ wê demê z hejmareke dîmen e.
c) Eger $|z| = 1$ wê demê $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Analîza pir pêkhate

- Hevkêşeya bi awayê $z^2 = \beta \ : \ \beta \in \mathbb{R}$ du çareseriyên wê hene $z_1 = \sqrt{\beta}$ û $z_2 = -\sqrt{\beta}$
  Eger $\beta < 0$ wê demê $-\beta > 0$, hevkêşe bi vî awayê çêdibe:
  $z^2 = -\beta . i^2$ û du çareseriya wê hene:
  $z_1 = \sqrt{-\beta}.i$ û $z_2 = -\sqrt{-\beta}.i$
  Mînak 1:
  Hevkêşeya $z^2 = 8$ du çareseriyên wê hene:
  $z_1 = 2\sqrt{2}$ û $z_2 = -2\sqrt{2}$
  Mînak 2:
  Ji bo çareserkirina hevkêşeya $z^2 + 9 = 0$, em destpêkê bi vî awayî binivîsin: $z^2 = -9 = 9.i^2$ du çareseriyên wê hene:
  $z_1 = \sqrt{9}.i = 3.i$ û $z_2 = -3.i$

- Hevkêşeya bi awayê $z^2 + bz + c = 0 \ : (a, b, c) \in \mathbb{R}$ û $a \neq 0$
  Ev hevkêşe bi riya Δ tê çareserkirin, sê rewş hene:
  a) Eger $\Delta > 0$ be, du çareserî hene:
  $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ û $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
  b) Eger $\Delta = 0$ be, yek çareserî heye: $z_1 = \frac{-b}{2a}$
  c) Eger $\Delta < 0$ be, du çareserî hene:
  $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ û $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ev her du çareserî kompleks in.
  Mînak 1:
  Hevkêşeya $z^2 + 2z + 10 = 0$ çareser bike.
  Çareserî:
  $\Delta = -36 \Longrightarrow \sqrt{-\Delta} = 6$ du çareserî hene:
  $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i$

$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2+6i}{2} = -1-3i$

Bi awayekî din (bidestxistina dama tam)

$z^2+2z+10 = z^2+2z+1+9 = (z+1)^2+9$

$= (z+1)^2-9i^2 = \left(z+1+(-3i)\right)\left(z+1-(-3i)\right)$

$= (z+1-3i)(z+1+3i)$

li vir diyar e du çareserî hene:

$z_1 = -1+3i$, $z_2 = -1-3i$

Mînak 2:

Hevkêşeya $z^2-2z+3=0$ çareser bike.

Çareserî:

$\Delta = -8 \implies \sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{2}$ du çareserî hene:

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1+\sqrt{2}i$

$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1-\sqrt{2}i$

Bi awayekî din (bidestxistina dama tam)

$z^2-2z+3 = z^2-2z+1-1+3 = (z-1)^2+2$

$= (z-1)^2-(\sqrt{2}i)^2 = \left(z-1-\sqrt{2}i\right)\left(z-1+\sqrt{2}i\right)$

li vir diyar e du çareserî hene:

$z_1 = 1+\sqrt{2}i$, $z_2 = 1-\sqrt{2}i$

- Eger $z^2+bz+c=0$ be li gorî ku a, b, c hejmarên rast in:
  a) Dema ku $\Delta > 0$; du çareserî di komika hejmarên rast de hene, $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
  b) Dema ku $\Delta = 0$; yek çareserî di komika hejmarên rast de heye, $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
  c) Dema ku $\Delta < 0$; du çareserî di komika hejmarên kompleks de hene, $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
- Eger $z^2+bz+c=0$ hevkêşeyek be û z_1, z_2 du çareseriyên wê bin:
  $z^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$
  $= a(z^2-(z_1+z_2)z+z_1.z_2)$ li gorî vê:
  $\boldsymbol{z_1+z_2 = \frac{-b}{a}}$, $\boldsymbol{z_1.z_2 = \frac{c}{a}}$

Mînak:

Pirpêkhateya $z^2 + 4z + 7$ analîz bike.

Çareserî:

Em destpêkê hevkêşeya $z^2 + 4z + 7 = 0$ çareser bikin.

$\Delta = -12 < 0 \implies \sqrt{-\Delta} = 2\sqrt{3}$ du çareserî hene:

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4+2\sqrt{3}i}{2} = -2 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4-2\sqrt{3}i}{2} = -2 - \sqrt{3}i$ li gorî vê

$z^2 + 4z + 7 = (z + 2 - \sqrt{3}i)(z + 2 + \sqrt{3}i)$

Bi awayekî din (bidestxistina dama tam)

$z^2 + 4z + 7 = z^2 + 4z + 4 + 3 = (z + 2)^2 + 3$

$= (z + 2)^2 - 3i^2 = \left(z + 2 + \left(-\sqrt{3}i\right)\right)\left(z + 2 - \left(-\sqrt{3}i\right)\right)$

$= (z + 2 - \sqrt{3}i)(z + 2 + \sqrt{3}i)$

Her du kokdamên hejmara kompleks $\boldsymbol{z = a + bi}$ bi awayê cebrî

Eger $\boldsymbol{\omega^2 = z}$ be, wê demê; $\boldsymbol{\omega}$ kokdama $\boldsymbol{z = a + bi}$ ye.

Eger t kokdama hejmara z be, li gorî vê;

$(t + \boldsymbol{\omega})(t - \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{t^2 - \omega^2 = t^2 - z = 0}$

wê demê $\boldsymbol{t = \omega}$ yan $\boldsymbol{t = -\omega}$

Em kokdamên hejmara $\boldsymbol{z = a + bi}$ bibînin;

Eger $\boldsymbol{\omega} = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$ kokdama hejmara $\boldsymbol{z = a + bi}$ be

$\boldsymbol{\omega}^2 = z \Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + bi$

$x^2 - y^2 + 2ixy = a + bi$ li gorî vê diyar e ku;

$2xy = b$ û $x^2 - y^2 = a$

Ji bo hêsanîkirina çareserkirina van hevkêşeyan, em dikarin sûdê ji hevkêşeya sêyem ya ku ji $\boldsymbol{\omega}^2 = z$ encam dibe bibînin.

$\boldsymbol{\omega}^2 = z \Leftrightarrow |\boldsymbol{\omega}^2| = |z| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$

Bi vî awayî dîtina nirxên x û y bi çareseriya her sê hevkêşeyên li jêr çêdibe.

$x^2 - y^2 = a$ (1)

$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 - b^2}$ (2)

$xy = \frac{b}{2}$ (3)

Mînak 1:

Her du kokdamên hejmara $\boldsymbol{z = 3 + 4i}$ bibîne.

Çareserî:

Eger $\boldsymbol{\omega} = x + iy$ kokdama hejmara $\boldsymbol{z}$ be, li gorî vê;

$x^2 - y^2 = 3$ (1)

$x^2 + y^2 = 5$ (2)

$xy = 2$ (3)

Bi çareserkirina hevbeş ya her du hevkêşeyên (1) û (2) tê dîtin ku $x^2 = 4 \Longrightarrow x \in \{-2, 2\}$ li gorî vê; $y^2 = 1 \Longrightarrow y \in \{-1, 1\}$ lê li gorî hevkêşeya (3) $xy > 0$ ango divê her du bi heman hêmayê bin, wê demê $(x, y) = (2, 1)$ yan $(x, y) = (-2, -1)$ e.

Her du kokdamên hejmara $\boldsymbol{z = 3 + 4i}$ ev in

$a_1 = 2 + i$ û $a_2 = -2 - i$

Mînak 2:

Her du kokdamên hejmara $\boldsymbol{z = 4 - 2\sqrt{5}i}$ bibîne.

Çareserî:

Eger $\boldsymbol{\omega} = x + iy$ kokdama hejmara $\boldsymbol{z}$ be, bi sûdwergirtina ji her du wekheviyên $(x - yi)^2 = z$ û $x^2 + y^2 = |z|$ tê dîtin ku;

$x^2 - y^2 = 4$ (1)

$x^2 + y^2 = 6$ (2)

$xy = -\sqrt{\mathbf{5}}$ (3)

Bi komkirina her du hevkêşeyên (1) û (2) tê dîtin ku $2x^2 = 4$

Yek ji çareseriyên hevkêşeyê $x = \sqrt{\mathbf{5}}$ e, em di (3) bi cih bikin, li gorî vê; $\boldsymbol{y} = -\mathbf{1}$ wê demê her du kokdamên hejmara $\boldsymbol{z}$ ev in; $\boldsymbol{\omega}_1 = \sqrt{\mathbf{5}} - i$ û $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1 = -\sqrt{\mathbf{5}} + i$

Hînkirin:

1) Tekez bike ku;

d) $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1-i)^2}{1-i} = -2i$

e) $\frac{1}{(1-i)^2} + \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{6+17i}{50}$

f) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

2) Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $9z^2 + 4 = 0$

b) $z^2 - 2z + 2 = 0$

c) $z^2 - 4z + 9 = 0$

d) $z^2 = -12$

3) Her du kokdamên her hejmarî ji yên li jêr bibîne.

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$

c) $z = 2i$

d) $z = 1 - 4\sqrt{5}i$

e) $z = 5 - 12i$

f) $z = 32i$

4) Pir pêkhateyên li jêr analîz bike û bi awayê faktorên ji pileya yekem binivîsa.

a) $z^2 + z + 1$

b) $2z^2 + z + \frac{1}{2}$

c) $3z^2 + z + \frac{1}{2}$

d) $8z^3 + 27$

5) Eger $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ û $\boldsymbol{c}$ hejmarên rast bin, z_1 çareserî be, li gorî rewşên li jêr hevkêşeyê bi awayê $az^2 + bz + c = 0$ binivîse.

a) $z_1 = i$

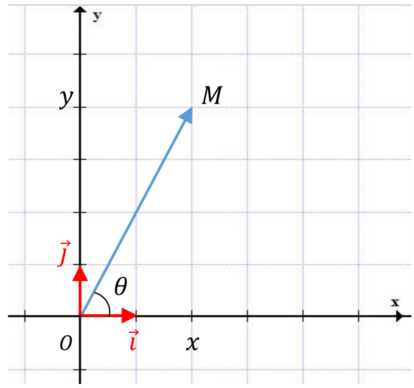
b) $z_1 = 5 - i$

c) $z_1 = \frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

GIRAFÎKA HEJMARÊN KOMPLEKS

Wêneya hejmara kompleks

Li gorî hevsengiya $M(x,y) \to z = x + iy$, em dikarin di kordînata homojen $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de her xala $M(x,y)$ bi hejmara komplek $z = x + iy$ ve girê bidin.



Di kordînata homojen $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de her xala $M(x,y)$ tîrek beramberî wê heye ku $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$, bi awayekî din tîra $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$ beramberî hejmara kompleks $z = x + iy$ ye. ji $\overrightarrow{OM}$ re **wêneya hejmara kompleks** z tê gotin.

Mînak:

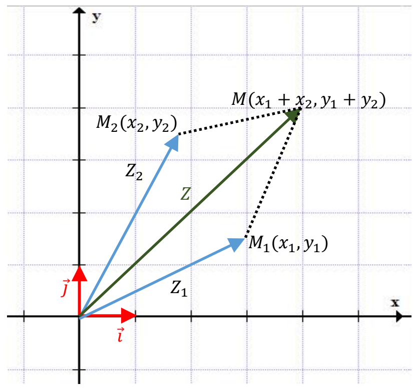
Hejmara kompleks	$z_1 = -3 + 2i$	$z_2 = 1$	$z_3 = i$	$z_4 = 1 - 4i$
Wêneya wê wek xalekê	$A(-3,2)$	$B(1,0)$	$C(0,1)$	$D(1,-4)$
Wêneya wê wek tîrekî	$\overrightarrow{OA} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$	$\overrightarrow{OB} = \vec{\imath}$	$\overrightarrow{OC} = \vec{\jmath}$	$\overrightarrow{OD} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$

Teqaleya kompleks

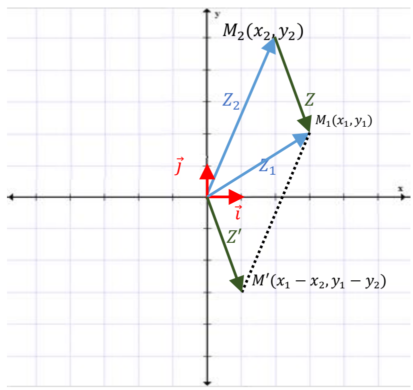
- ❖ Her hejmara kompleks $z = x + 0i$ wêneya wê li ser tewareya XX' xala $N(x,0)$ e.
- ❖ Her hejmara kompleks $z = 0 + yi$ wêneya wê li ser tewareya YY' xala $E(0,y)$ ye.
- ❖ Ji teqaleya bi her du tewareyên li jor nîşankirî re **teqaleya kompleks** tê gotin.

Di kordînatê de wêneyên hejmarên kompleks wek tîr

Eger $z_1 = x_1 + iy_1$ û $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmarên kompleks bin.



- $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1)$ wêneya hejmara $z_1 = x_1 + iy_1$ û $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2)$ wêneya hejmara $z_2 = x_2 + iy_2$ ye.
- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i.(y_1 + y_2) =$ z
  $\overrightarrow{OM} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2).\vec{\jmath}$
  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (wêneya z ye)
  wêneya komkirina du hejmaran yeksanî komkirina her du wêneyên wan e.



- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i.(y_1 - y_2) =$ z'
  $\overrightarrow{OM'} = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_1 - y_2).\vec{\jmath}$
  $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ (wêneya z' ye)
  wêneya derxistina du hejmaran yeksanî derxistina her du wêneyên wan e.
- $a.z_1 = ax_1 + iay_1$
  $\overrightarrow{ON} = (ax_1)\vec{\imath} + (ay_1)\vec{\jmath}$
  $\overrightarrow{ON} = a.\overrightarrow{OM_1}$ (wêneya $a.z_1$ e)
  Em dikarin hevdana hejmareke rast bi tîrekî re di kordînatê de li şûna hevdana hejmareke rast bi hejmareke kompleks re binivîsin.

Encam:

- Karanînên li ser hejmarên kompleks, li ser tîrên wan jî pêk tên.
- Eger di kordînata $(O,\vec{i},\vec{j})$ de $z_1 = x_1 + iy_1$ û $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmar bin û $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ wêneyên wan bin, wê demê $z_1.z_2 = (x_1.x_2 + y_1.y_2) - i.(x_1.y_2 - x_2.y_1)$
- Eger $x_1.y_2 - x_2.y_1 = 0$ be, wê demê $\overrightarrow{OM_1}$ û $\overrightarrow{OM_2}$ rastênhev in û bi vî awayî tê nivîsandin; $\mathrm{IM}(z_1.z_2) = 0$
- Eger $x_1.x_2 + y_1.y_2 = 0$ be, wê demê $\overrightarrow{OM_1}$ û $\overrightarrow{OM_2}$ bi hev re tîk in û bi vî awayî tê nivîsandin; $\mathrm{Re}(z_1.z_2) = 0$

Di kordînatê de wêneyên hejmarên kompleks wek xal

Eger di kordînata $(O,\vec{i},\vec{j})$ de $z_1 = x_1 + iy_1$ û $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmar bin û $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ wêneyên wan bin.

Dirêjahiya parçeya rastekanM_1M_2 bi vê zagonê tê dayîn

$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ev yeksanî dirêjahiya hejmara $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i.(y_1 - y_2)$ ye ango; $M_1M_2 = |M_1M_2|$

Mînak 1:

Komika xalên teqaleyê $M(z)$, wêneyên hejmarên z yên ku wekheviya $|z - 2| = 3$ pêk tînin, bibîne.

Çareserî:

Eger M_2 xala wêneya hejmara 2 be, li gorî vê; wekheviya $|z - 2| = 3$ nîşan dide ku $M(z)M_2 = 3$ ango dûrahiya xala $M(z)$ ji xala M_2 yeksanî 3 ye, komika xalên bazinê ku navenda wê $M_2(2,0)$ û nîveşkêla wê 3 ye, wekheviyê pêk tîne.

Mînak 2:

Komika xalên teqaleyê $M(z)$, wêneyên hejmarên z yên ku wekheviya $|z - 1 + 2i| = |z - 3 - 5i|$ pêk tînin, awayê ku nîşan dide bibîne.

Çareserî:

Eger $z_1 = 1 - 2i$ û $z_2 = 3 + 5i$ be, her du xalên M_1 û M_2 wêneyên wan bin, hevkêşe bi vî awayî çêdibe $|z - z_1| = |z - z_2|$ ango $\mathrm{M}M_1 = \mathrm{M}M_2$ komika xalên M yên ku dûrahiya wan ji her du xalên M_1 û M_2 heman e, xalên tewareya rasteka M_1M_2 ye.

Hînkirin:

1) Eger $z_1 = 4 - 2i$ û $z_2 = 1 + 2i$ du hejmar bin, yên li jêr di kordînatê de xêz bike.

z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $2z_1$, $-3z_2$

2) Eger xala $M(x, y)$ wêneya hejmara $z = x + yi$ be, hevkêşeya Dîkart ya komika xalên M li gorî rewşên jêr bibîne.

a) $|z + 1| = |z - i|$

b) $|z - 2 + i| = |z - 1 - 3i|$

d) $(z + \bar{z})^2 + (z - \bar{z})^2 = 4$

e) $|iz - 1| = |z + 2|$

f) $|iz + 3 - 2i| = 5$

HEJMARÊN KOMPLEKS AWAYÊ BIHÊZ

Eger $u = x + iy$ hejmareke kompleks be, dirêjahiya wê yeksanî yek be $|u| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, li gorî vê; hejmarek rast heye θ ku $x = \cos\theta$ û $y = \sin\theta$ pêk tîne, wê demê em dikarin bi vî awayî binivîsin $u = \cos\theta + i\sin\theta$

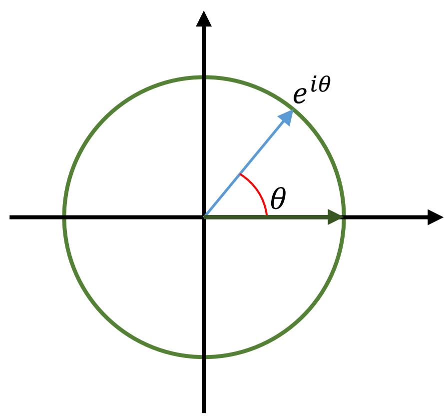
Eger θ hejmarek rast be, hejmara kompleks $u = \cos\theta + i\sin\theta$ bi awayê $e^{i\theta}$ tê nivîsandin û navê wê jî dibe **awayê bihêz yê $\boldsymbol{u}$** .

Encam:

- $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ li gorî vê;
  $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ango $e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})}$
- $\sin\theta = IM(e^{i\theta})$, $\cos\theta = Re(e^{i\theta})$
- Dem ku $\theta = 0$ be; $e^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- Dirêjahiya her hejmara kompleks ya yek, yeksanî vajî û hevjimara wê ye $|z| = 1 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$, li gorî vê;
  $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$
- $-e^{i\theta} = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi) = e^{i(\theta+\pi)}$

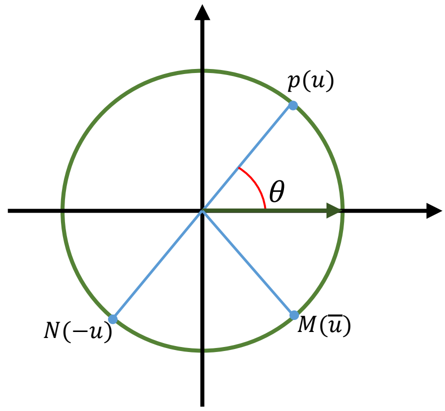
Girafîka hejmara kompleks $u = e^{i\theta}$

Di kordînata $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de hejmara $u = e^{i\theta}$ bi xala $p(u)$ ya li ser bazinekî nîveşkêla wî yeksanî yek û navenda wî O ye tê nîşankirin, tîra $\vec{\imath}$ û nîveşkêla Op qiraça θ pêk tînin.



Xala $M(\overline{u})$ ya ku hejmara $\overline{u} = e^{-i\theta}$ nîşan dike, hemaliya xala $p(u)$ li gorî tewareya XX' e.

Lê xala $N(-\overline{u})$ ya ku hejmara $\overline{u} = e^{i(\theta+\pi)}$ nîşan dike, hemaliya xala $p(u)$ li gorî navenda kordînatê ye.



Mînak:

a) $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

d) $e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

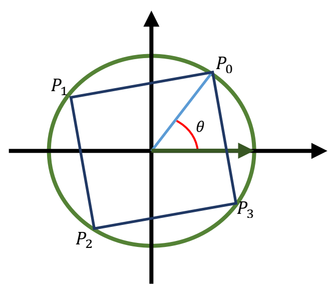
e) $e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

f) $e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

g) $e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

h) $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Xalên P_k yên ku hejmarên $z_k = e^{i\left(\theta+\frac{k\pi}{2}\right)}$: $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ nîşan dike, dibin goşeyên dama ku eşkêlên wê di navenda kordînatê de hevbirîn in.



Xalên P_k yên ku hejmarên $z_k = e^{i\left(\theta+\frac{2k\pi}{2}\right)}$: $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ nîşan dike, dibin goşeyên pirgoşeya bi n kenar ya ku bazinê men di goşeyên wê re derbas dibe.

Zagonên Euler

Em dikarin rêjeyên sêgoşeyî yên her hejmara rast θ wek hejmara compleks bi vî awayî binivîsin:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Bi komkirinê em dibînin $\boldsymbol{\cos\theta} = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}}{\boldsymbol{2}}$

Û bi derxistinê em dibînin $\boldsymbol{\sin\theta} = \frac{\boldsymbol{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}}{\boldsymbol{2i}}$

Ji van her duyan re **zagonên Euler** tê gotin

Hevdan û parvekern

Eger $\theta\,,\varphi$ du hejmarên rast bin, wê demê

$e^{i\theta}.e^{i\varphi} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= (\cos\theta\,.\cos\varphi - i\sin\theta\,.\sin\varphi) + i(\sin\theta\,.\cos\varphi + \cos\theta\,.\sin\varphi)$

$=\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = e^{i(\theta+\varphi)}$ li gorî vê;

$\boldsymbol{e^{i\theta}.e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}}$

Eger $\theta\,,\varphi$ du hejmarên rast bin, wê demê

$$\frac{\boldsymbol{e^{i\theta}}}{\boldsymbol{e^{i\varphi}}} = e^{i\theta}.\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{i\theta}.e^{-i\varphi} = e^{i\theta-i\varphi} = \boldsymbol{e^{i(\theta-\varphi)}}$$

Encam:

1) Eger $\theta = \varphi$ be, wê demê $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$
2) Bi giştî $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Zagona De Moivre

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Mînak:

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})^{24} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{24}$$

$$= \cos\left(24\times\frac{-\pi}{6}\right) - i\sin\left(24\times\frac{-\pi}{6}\right) = \cos(-4\pi) - i\sin(-4\pi)$$

$$= 1 + 0\,.\,i = 1$$

Mînak:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{22} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{22}$$

$$= \cos\left(22\times\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(22\times\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 16\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 16\pi\right)$$

$$= 0 + 1\,.\,i = i$$

Karanînên hejmarên kompleks di sêgoşeyan de

1) **Dîtina rêjeyên sêgoşeyî yên qatên qraçê bi nîşana rêjeyên sêgoşeyî yê qraçê, bi alîkariya hejmarên kompleks**

   Mînak:

   rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça 2θ bi nîşana rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça θ binivîse.

   çareserî:

   Li gorî zagona **De Moivre**: $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

   $\cos 2\theta + i\sin 2\theta = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta$

   $= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\,(2\sin\theta\cos\theta)$

   Bi yeksanîkirina her du beşên rast di her du aliyên wekheviyê, em dibînin ku $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

   piştre em her du beşên dşmen yeksanî hev bikin, em dibînin ku $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

   ji bo dîtina $\tan 2\theta$:

   $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

   $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ (me par û paran li $\cos^2\theta$ parve kir)

2) **Guhertina rêjeyên sêgoşeyî yên bi awayê** $\sin^n\theta$ **yan** $\cos^m\theta$, **bi awayê komkirina rêjeyên sêgoşeyî yên qatjimara qiraça** θ.

   Mînak:

   $\cos^3\theta$ bi awayê komkirina rêjeyên sêgoşeyî yên qatjimara qiraça θ bibîne.

çareserî:

$$\cos^3\theta = \left(\frac{\boldsymbol{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}}{\mathbf{2}}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\boldsymbol{e^{i\theta}} + \boldsymbol{e^{-i\theta}}\right)^3$$

Li gorî zagona (dupêkhate ya Newton)

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(\boldsymbol{e^{3i\theta}} + 3\boldsymbol{e^{2i\theta}}\boldsymbol{e^{-i\theta}} + 3\boldsymbol{e^{i\theta}}\boldsymbol{e^{-2i\theta}} + \boldsymbol{e^{-3i\theta}}\right)$$

$$\mathrm{Cos}^3\theta = \frac{1}{8}\left[\left(\boldsymbol{e^{3i\theta}} + \boldsymbol{e^{-3i\theta}}\right) + 3\left(\boldsymbol{e^{i\theta}} + \boldsymbol{e^{-i\theta}}\right)\right]$$

$\cos^3\theta = \frac{1}{8}[2\cos 3\theta + 6\cos\theta]$ (li gorî zagona Euler)

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

Teorî:
Eger θ hejmarek rast be, komika çareseriyên hevkêşeya $e^{i\varphi} + e^{-i\theta}$ (ya nenasê wê φ ye) ev e $\{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$

Hejmara kompleks bi awayê bihêz

Her hejmara kompleks $z \neq 0$ dema ku dirêjahiya wê yeksanî 1 be wê demê $\frac{z}{|z|}$, li gorî vê; hejmarek rast θ heye ku $\frac{z}{|z|} = e^{-i\theta}$ û em dikarin bi vî awayî binivîsin $z = |z|e^{i\theta}$ û eger $r = |z| > 0$ be wê demê $z = re^{i\theta}$ jê er **awayê bihêz yê hejmara kompleks** û $\boldsymbol{\theta}$ **qiraça hejmara kompleks** tê gotin.

Her hejmara kompleks $z = x + iy$ bi vî awayî tê nivîsîn
$z = re^{i\theta}$ li gorî ku $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
û $e^{i\theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ lê em dizanin ku
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
Wê demê $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ û $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$

Mînak1:

Hejmara $z = \sqrt{3} - i$ bi awayê bihêz binivîse.

Çaerserî:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$cos\,\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ û $sin\,\theta = \frac{-1}{2}$ li gorî vê $\theta = \frac{-\pi}{6}$

Awayê bihêz $z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Mînak2:

Hejmara $z = -2 + 2i$ bi awayê bihêz binivîse.

Çaerserî:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$cos\,\theta = \frac{x}{|z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ û $sin\,\theta = \frac{y}{|z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ li gorî vê $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Awayê bihêz $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Hevdan û parvekirina du hejmarên kompleks bi awayê bihêz

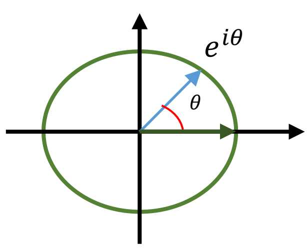
Eger $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ û $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ du hejmarên kompleks bin

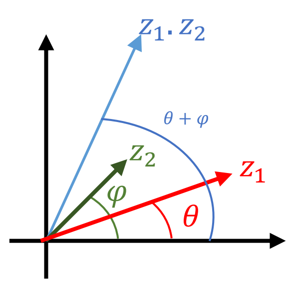
1) $z_1 . z_2 = r_1 e^{i\theta} . r_2 e^{i\varphi} = r_1 r_2 \left(e^{i\theta} . e^{i\varphi}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}$
2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta}}{r_2 e^{i\varphi}} = \frac{r_1}{r_2} . \frac{e^{i\theta} .\, e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} .\, e^{-i\varphi}} = \frac{r_1}{r_2} . \frac{e^{i(\theta-\varphi)}}{1} = \frac{r_1}{r_2} . e^{i(\theta-\varphi)}$

Têbênî:
Eger $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ hejmareke kompleks be,
wê demê $\boldsymbol{z^n = r^n e^{i\theta}}$

Girafîka hejmara kompleks $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$

Di kordînata $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de hejmara $u = e^{i\theta}$ bi xala $p(z)$ ya li ser bazinekî nîveşkêla wî yeksanî $\boldsymbol{r}$ û navenda wî O ye tê nîşankirin, tîra i û nîveşkêla Op qiraça θ pêk tînin. Eger $z_1 = r_1 e^{i\theta}$ û $z_2 = r_2 e^{i\varphi}$ du hejmarên kompleks bin, em hejmara $z = z_1 . z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta+\varphi)}$ Bi awayî li jêr xêzdikin.





Mînak1:

Hejmara $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$ bi awayê bihêz û bi awayê cebrî binivîse û piştre rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça $\frac{\pi}{12}$ bibîne.

Çaerserî:

bi awayê bihêz

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \ , 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$$

bi awayê cebrî

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

ji bo dîtna $cos\frac{\pi}{12}$ û $sin\frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \sqrt{2}\,cos\frac{\pi}{12} \ \text{ û } \ \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\,sin\frac{\pi}{12} \Longrightarrow$$

$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \ \text{ û } \ sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Mînak2:

Eger $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ hejmarek be, $(z)^{48}$ bibîne.

Çaerserî:

Par $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Paran $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$(z)^{48} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{48} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{48} = 2^{24}.\,e^{i4\pi} = 2^{24}$$

Kokên hejmarên kompleks yên ji pileya n

Eger $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ hejmareke kompleks be, ji komika hejmarên kompleks yên ku $z^n = z_0$ pêk tînin re **kokên ji pileya** n yên vê hejmarê tê gotin.

Eger $z = re^{i\theta}$ yek ji wan kokan be, li gorî vê $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$ wê demê $r^n = r_0$

$n\theta = \theta_0 + 2\pi k \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$r = \sqrt[n]{r_0} \qquad (k \in \mathbb{Z})$ li gorî ku $\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}$

zagona giştî ya kokan

$z = w_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \quad (k \in \{0, 1, 2, \dots, \mathrm{n} - 1\})$

Mînak:

Eger $\mathrm{z} = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ hejmarek kompleks be, Kokên ji pileya sêyem bibîne.

Çaerserî:

Em ê z bi awayê bihêz binvîsin

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ û $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ li gorî vê $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Awayê bihêz $\mathrm{z} = 8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

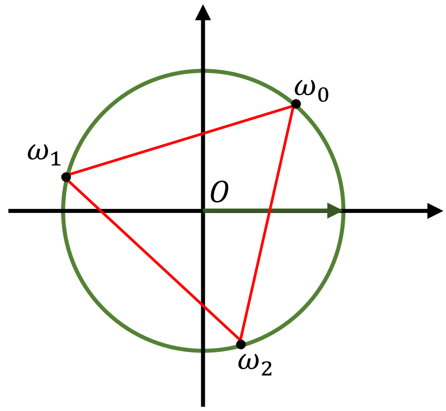
Kokên ji pileya sêyem ev in

$z = w_k = \sqrt[3]{8}\, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3})} \qquad (k \in \{0, 1, 2\})$

Dema $k = 0 \implies w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Dema $k = 1 \implies w_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{11\pi}{12}}$

Dema $k = 2 \implies w_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})} = 2e^{i\frac{19\pi}{12}}$



Awayê li kêlekê girafîka van kokan di kordînatê de nîşan dike, tê dîtin ku her sê xalên kokan sêgoşeyeke hemkenar pêk tînin.

Mînak:

Hevkêşeya $z^5 + 1 = 0$ di komika hejmarên kompleks $\mathbb{C}$ de çareser bike.

Çaerserî:

Eger me hevkêşe bi awayê $z^5 = -1$ nvîsand, wê demê em ê Kokên hejmara -1 yên ji pileya pêncem bibînin. -1 bi vî awayî $z = e^{i\pi}$ tê nivîsandin, li gorî vê

Kokên ji pileya 5 an ev in

$z = w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)} \quad (k \in \{0,1,2,3,4\})$

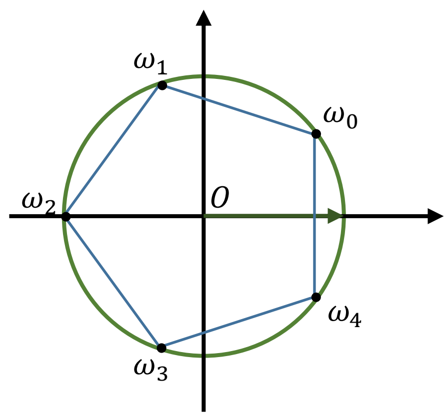
Dema $k = 0 \implies w_0 = e^{i\frac{\pi}{5}}$

Dema $k = 1 \implies w_1 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$

Dema $k = 2 \implies w_2 = e^{i\pi} = -1$

Dema $k = 3 \implies w_3 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

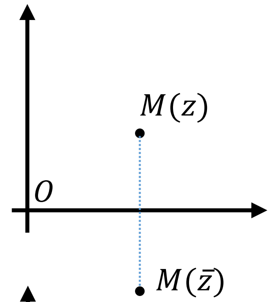
Dema $k = 4 \implies w_1 = e^{i\frac{9\pi}{5}}$



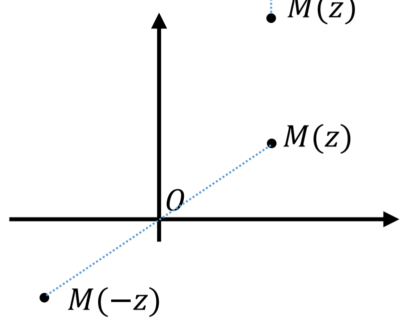
Awayê li kêlekê girafîka van kokan di kordînatê de nîşan dike, tê dîtin ku her pênc xalên kokan pêncgoşeyeke birêkûpêk pêk tînin.

Pêkanînên hejmarên kompleks di geometrî de

Eger z û $\bar{z}$ du hejmarên kompleks bin û bi du xalan $M(z)$ û $M(\bar{z})$ di kordînata kompleks de werin nîşankirin wê demê her du xal li gorî XX' hemalî ne.



Eger z û $-z$ du hejmarên kompleks bin û bi du xalan $M(z)$ û $M(-z)$ di kordînata kompleks de werin nîşankirin wê demê her du xal li gorî navenda kordînatê hemalî ne.



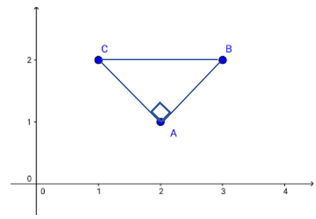
Eger z_A û z_B du hejmarên kompleks bin û bi her du xalên A û B di kordînata kompleks de nîşankirî bin, wê demê xala M ya nîvê parçeya rastekan AB bi hejmara $\frac{z_A+z_B}{2}$ tê nîşankirin.

Eger z_A , z_B û z_C sê hejmarên kompleks bin û bi her sê xalên A , B û C di kordînata kompleks de nîşankirî bin, qiraça hejmara $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ew ferqa di navbera qiraça hejmara $z_B - z_A$ û qiraça hejmara $z_C - z_A$ de ye û bi qiraça $B\hat{A}C$ tê nîşankirin.

Encam:
Mercê ku her sê xalên A , B û C li ser heman rastekî bin; divê hejmara $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ hejmareke rast be.
Mercê ku AB û AC bi hev re tîk bin; divê hejmara $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ hejmareke dîmen û ne sifir be.

Mînak 1:

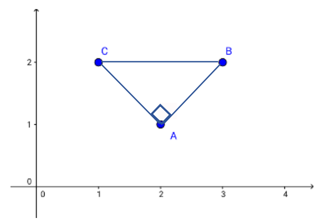
Eger $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$ û $z_3 = 1 + 2i$ sê hejmarên kompleks bin û bi her sê xalên $A(z_1)$, $B(z_2)$ û $C(z_3)$ di kordînata kompleks de nîşankirî bin, tekez bike ku sêgoşeya ABC di A de tîk e.



Çareserî:

Mercê ku AB û AC bi hev re tîk bin; divê hejmara $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ hejmareke dîmen û ne sifir be

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{3+2i-(2+i)}{1+2i-(2+i)} = \frac{1+i}{-1+i} = \frac{(1+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-2i+1}{2} = i$$



Xwiya ye ku encam hejmareke dîmen e li gorî vê; sêgoşeya ABC di A de tîk e.

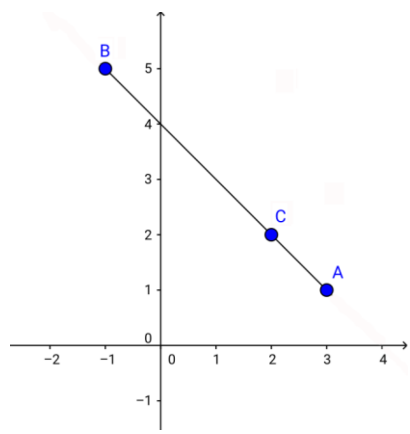
Mînak 2:

Eger $z_1 = 3 + i$, $z_2 = -1 + 5i$ û $z_3 = 2 + 2i$ sê hejmarên kompleks bin û bi her sê xalên $A(z_1)$, $B(z_2)$ û $C(z_3)$ di kordînata kompleks de nîşankirî bin, tekez bike ku her sê xalên A , B û C li ser heman rastekî ne.

Çareserî:

Mercê ku her sê xalên A , B û C li ser heman rastekî bin; divê hejmara $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ hejmareke rast be.

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-1+5i-(3+i)}{2+2i-(3+i)} = \frac{-4+4i}{-1+i} = \frac{(-4+4i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{4+4i-4i+4}{2} = 4$$



Xwiya ye ku encam hejmareke rast e li gorî vê; her sê xalên A , B û C li ser heman rastekî ne.

Hînkirin:

1) $\sin^5\theta$ bi awayê komkirina rêjeyên sêgoşeyî yên qatjimara qiraça θ bibîne, li gorî encamê, $\theta \int \sin^5 x dx$.
2) Rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça 3θ bi nîşaneya rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça θ bibîne.
3) Van hejmarên li jêr bi awayê cebrî binvîse.

a) $(1+i)^{48}+(1-i)^{48}$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

c) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{16}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{8}$

d) $(1+3i)^2$

e) $(1-3i)^2$

f) $(3+2i)^3$

g) $(3+4i)(3-4i)$

h) $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$

i) $\frac{-4+i}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$

j) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{9}$

k) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}+\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}-1\right)^{11}$

4) Hejmarên li jêr bi awayê bihêz binivîse.

$$8, -6, i, 9i, 1-i, 1+i, 1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}, \frac{2}{1-i\sqrt{3}}$$

5) Hejmara kompleks $z = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ bi awayê bihêz binivîse.

6) $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$ bi awayekî sade binivîse.

7) Hejmarên li jêr bi awayê sade binivîse.

a) $(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})^4$ *b)* $(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24})^6$

8) Eger $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ hejmareke kompleks be.

a) z bi awayê bihêz binivîse.
b) Her du kokên damî yên hejmara z bibîne û girafîka wan xêz bike.
c) Kokên ji pileya çarem bibîne, girafîka wan xêz bike.

PIRSÊN BEŞA HEŞTEM

1) Tekez bike ku;
$z^4 + 4 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$

2) Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $z^2 + 3z + 6 = 0$

b) $z^2 + 4z + 5 = 0$

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

d) $4z^2 + 25 = 0$

3) Van hejmarên li jêr bi awayê cebrî binvîse.

a) $\frac{3+6i}{3-4i}$

b) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 - \frac{3+6i}{3-4i}$

c) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

4) Eger $z^2 - kz + 5 = 0 : k \in \mathbb{R}$ hevkêşeyek be û $2 + i$ çareseriya wê be, nirxê k bibîne.

5) $\cos^6 \theta$ bi awayê komkirina rêjeyên sêgoşeyî yên qatjimara qiraça θ bibîne, li gorî encamê, $\theta \int cos^6 xdx$.

6) Eger $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ û $z_2 = 1 + i$ du hejmarên kompleks bin, $z = \frac{z_1}{z_1}$ bi awayê bihêz û bi awayê cebrî binivîse û piştre rêjeyên sêgoşeyî yên qiraça $\frac{7\pi}{12}$ bibîne.

9) Eger $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$ û $z_3 = 1 + ie^{i\theta}$ li gorî ku $\theta \in]0, \pi[$ sê hejmarên kompleks bin û bi her sê xalên $A(z_1)$, $B(z_2)$ û $C(z_3)$ di kordînata kompleks de nîşankirî bin.

a) tekez bike ku AB eşkêla bazinê ku di her sê xalên sêgoşeya ABC re derbas dibe ye.

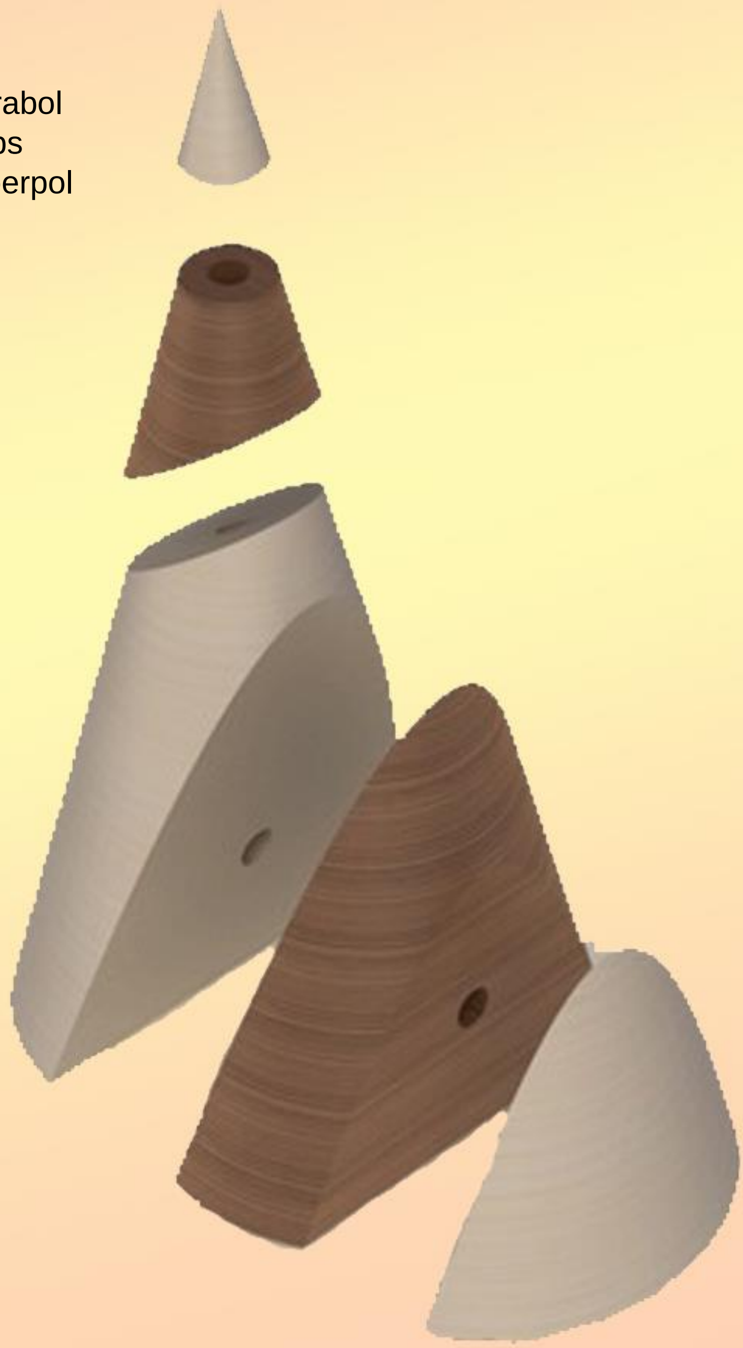
b) Eger hejmara iz_3 bi xala M' di kordînatê de nîşankirî be, tekez bike ku her sê xalên M' , M û B li ser heman rastekê ne.

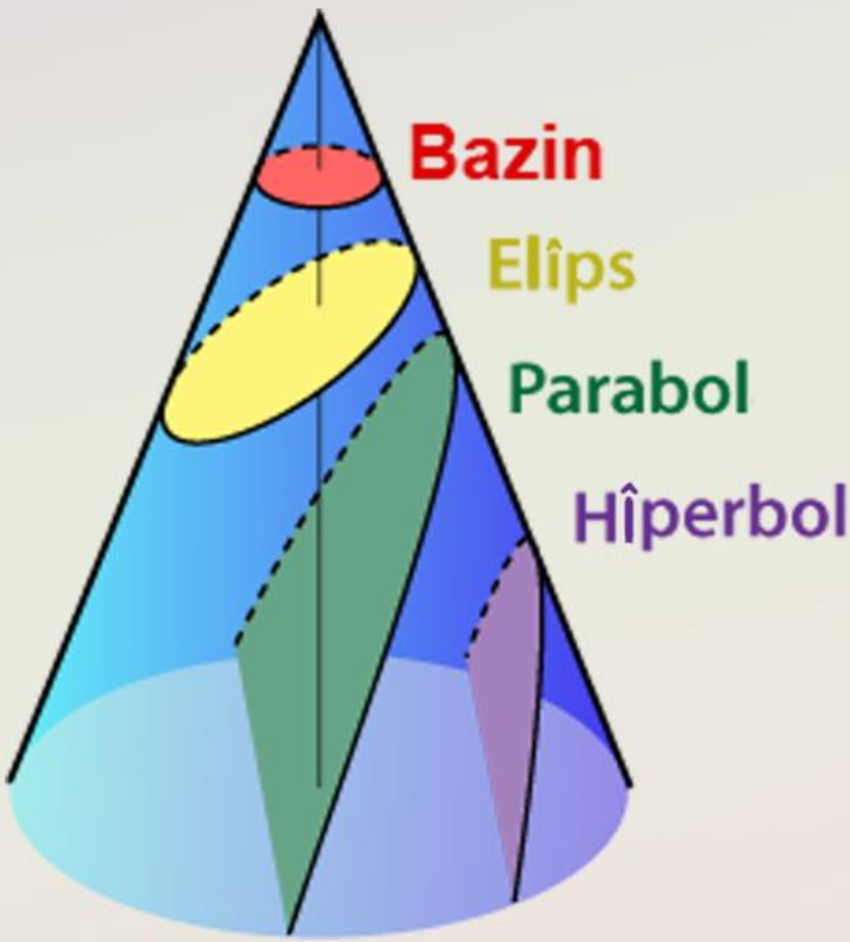
GEOMETRIYA ANALÎZ

BEŞA NEHEM

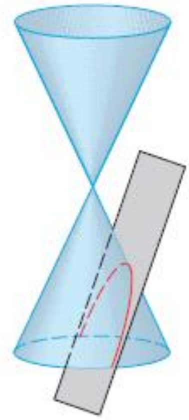
BIRÎNÊN KOVIKÊ

1) Parabol
2) Elîps
3) Hîberpol




Bazin
Elîps
Parabol
Hîperbol

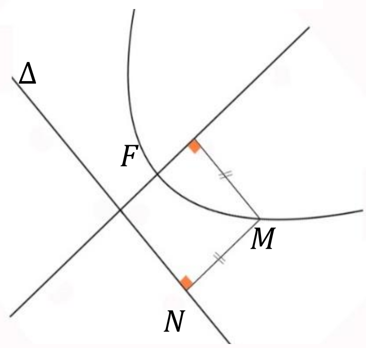
PARABOL



Eger Δ di teqaleyê de rastekek be û $F \notin \Delta$ di heman teqaleyê de xaleke be, ji komika xalên ku dûrahiya wan ji xala F yeksanî dûrahiya wan ji rasteka Δ re **parabola** tê gotin û sembola wê jî $\mathcal{P}$ ye.

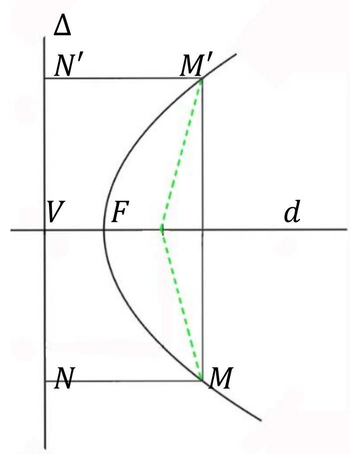
xêzkirina parabol

Em destpêkêkê rasteka Δ û xala F ya ku ne endamê Δ xêz bikin, piştre em xalên ku dûrahiya wan ji Δ û xala Δ heman in xêz bikin, girafîka tê bidestxistin parabol e.



Taybetiyên parabol

1) Eger $\mathcal{P}$ parabol be, M xalek be ji $\mathcal{P}$, N xala daxistina tîk ya xala M be, li gorî vê $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$
2) Ji F re **nîskoka parabol** tê gotin.
3) Ji Δ re **rastker** tê gotin.
4) Ji xala V ya ku dikeve nîvê dûrahiya di navbera xala F û rasteka Δ de re **girê parabol** tê gotin.
5) Ji rasteka d ya ku di xala F re derbas dibe û li ser Δ tîk e re **tewareya hemalî** ya parabol tê gotin.



Hevkêşeya parabol a hêsan:

Eger Δ rastekek di teqaleyê de be û $F \notin \Delta$ xaleke di heman teqaleyê de be, $\mathcal{P}$ parabola ku Δ rastker û F nîskoka wê ye.

Eger me kordînatek xêz kir li gorî ku navenda kordînatê O li ser girê parabolê be, tewareya OY li ser tewareya hemalî ya parabolê be, li gorî vê F (O, P) û hevkêşeya rastkerê Δ ev e $y = -p$

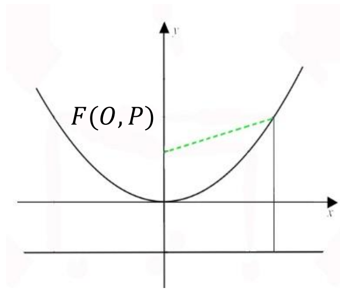
eger $P(x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow PF = PP'$

$$\sqrt{x^2 + (y^2 - p)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y^2 + p)^2}$$

$$x^2 + (y^2 - p)^2 = (y^2 + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

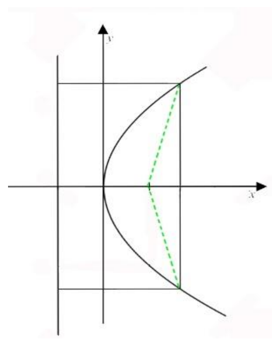


Tê dîtin ku hevkêşeya asayî ya parabola ku girê wê li ser navenda kordînatê ye û tewareya wê ya hemalî li ser tewareya YY' ev e $x^2 = 4py$

Dema ku $p > 0$ be, parabol ber bi jor ve vekirî ye.

Dema ku $p < 0$ be, parabol ber bi jêr ve vekirî ye.

Bi heman awayî tê dîtin ku hevkêşeya asayî ya parabola ku girê wê li ser navenda kordînatê ye û tewareya wê ya hemalî li ser tewareya XX' ev e $y^2 = 4py$



Dema ku $p > 0$ be, parabol ber bi rastê ve vekirî ye.

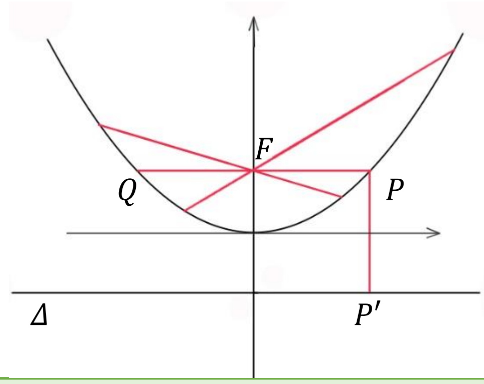
Dema ku $p < 0$ be, parabol ber bi çepê ve vekirî ye.

Her parçeya rastekan a ku di nîskoka parabolê re derbas dibe û her du aliyên wê li ser parabolê ne, jê re **jena nîskok** tê gotin.

Her **jena nîskok** a ku bi rastker re rastênhev be jê re **jena nîskok a bingehîn** tê gotin.

Mînak:

Di awayê li kêlekê de jena nîskok a bingehîn PQ ye.



Hevkêşeya parabol ya ku nîskoka wê di navenda kordînatê de ye

1) $x^2 = 4py$, nîskoka wê $F(0, p)$ e, havkêşeya rastkera wê $y = -p$ û tewareya wê oy e.
2) $y^2 = 4px$, nîskoka wê $F(p, 0)$ e, havkêşeya rastkera wê $x = -p$ û tewareya wê ox ye.

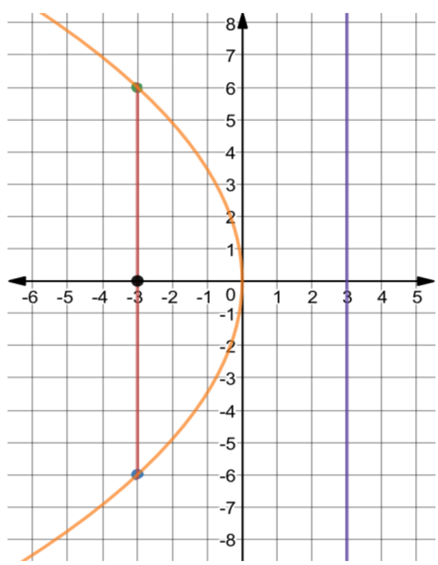
Mînak 1:

Nîskok û rastkera parabola ku hevkêşeya wê $y^2 = -12x$ be, bibîne û piştre xêz bike.

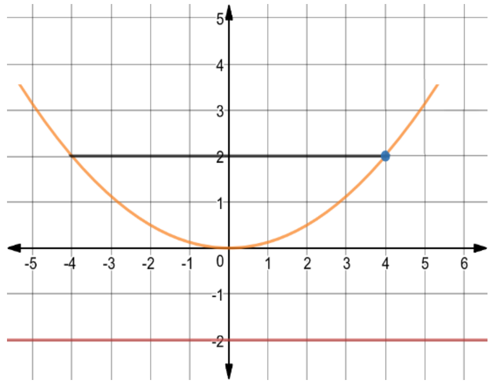
Çareserî:

Bi hevrûkirina hevkêşeyê $y^2 = -12x$ bi hevkêşeya asayî re em dibînin ku $4p = -12 \Longrightarrow p = -3$ li gorî vê

- tewareya hemalî ya parabol tewareya ox ye.
- Nîskoka wê $F(-3,0)$
- Hevkêşeya rastkera wê $x = 3$
- parabol ber bi çepê ve vekirî ye.
- dirêjahiya jena navendî a bingehîn $4|p| = 12$ e, parabol di her du xalên $(-3, -6), (-3, 6)$ derbas dibe.



Mînak 2:



Hevkêşeya parabol a ku tewareya wê ya hemalî li ser tewareya YY' û girê wê li ser navenda kordînatê ye, û di xala $M(4,2)$ derbas dibe bibîne.

Çareserî:

hevkêşeya asayî ya parabolê ev e $x^2 = 4py$

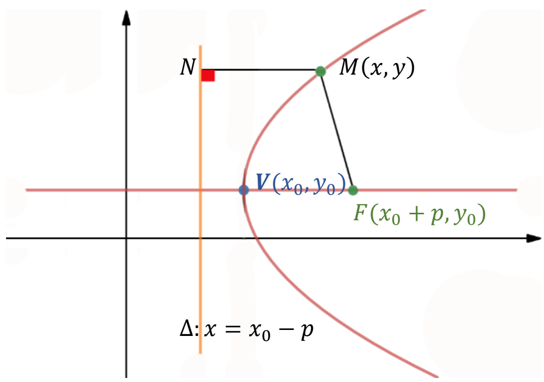
$M(4,2) \in \mathcal{P} \Longrightarrow (4)^2 = 4p(2) \Longrightarrow p = 2$

Li gorî vê; hevkêşeya parabol ev e $x^2 = 8y$

Hevkêşeya giştî ya parabola ku tewareya wê bi yek ji tewareyên kordînatê re rastênhev in

1) Tewareya parabol û XX' rastênhev in.

Eger girê parabol $\boldsymbol{V}(x_0, y_0)$, dûrahiya nîskok ji rastkerê $|2p|$ be, tewareya wê û XX' rastênhev bin, wê demê hevkêşeya rastker ev e $x = x_0 - p$ û nîskoka wê $F(x_0 + p, y_0)$ e.



Eger $M(x,y) \in p$ be, N xala daxistina M li ser rastkera Δ be, li gorî pênaseya parabol

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow MF = MN$$

$\sqrt{(x - x_0 - p)^2 + (y - y_0)^2} = |x - x_0 + p|$ bi damkirina her du aliyan:

$$(x - x_0 - p)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0 + p)^2$$

$$(y - y_0)^2 = (x - x_0 + p)^2 - (x - x_0 - p)^2$$

$$(y - y_0)^2 = (2x - 2x_0)(2p)$$

$$\boldsymbol{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

2) Tewareya parabol û YY' rastênhev in.

Bi heman awayî hevkêşeya giştî ya parabola ku girê wê $V(x_0, y_0)$ **e,** tewareya wê bi YY' re rastênhev e, bi vî awayî dibe.

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Dema ku $p > 0$ be, parabol ber bi aliyê rastê ve vekirî ye.

Dema ku $p < 0$ be, parabol ber bi aliyê çepê ve vekirî ye.

Hevkêşeya giştî ya parabola ku girê wê ne di navenda kordînatê de ye

1) $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, nîskoka wê $F(x_0, y_0 + p)$ ye, hevkêşeya rastkera wê $y = y_0 - p$ û hevkêşeya tewareya hemalî rasteka $x = x_0$ e.
2) $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, nîskoka wê $F(x_0 + p, y_0)$ e, hevkêşeya rastkera wê $x = x_0 - p$ û hevkêşeya tewareya hemalî rasteka $y = y_0$ e.

Mînak:

Eger $x^2 + 2x - 8y - 15 = 0$ hevkêşeya parabol be, gir û rastkera wê bibîne, piştre girafîka wê xêz bike.

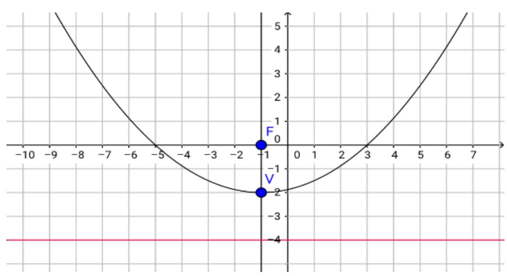
Çareserî:

$x^2 + 2x = 8y + 15$ (bidestxistina dama tam)

$x^2 + 2x + 1 = 8y + 15 + 1$

$x^2 + 2x + 1 = 8y + 16$
$= 8(y + 2)$

$(x + 1)^2 = 4(2)(y + 2)$



lê li gorî hevkêşeya giştî $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

em dibînin ku $p = 2$, $x_0 = -1$ û $y_0 = -2$

girê wê $V(-1,-2)$ û nîskoka wê $F(-1,0)$ e, hevkêşeya rastkera wê $y = -4$ e, parabol ber bi jor ve vekirî ye, dirêjahiya jena navendî a bingehîn $4|p| = 8$ e, parabol di her du xalên $(-3,-6),(-3,6)$ re derbas dibe.

Mînak 2:

Hevkêşeya parabol a ku nîskoka wê $F(-1,1)$ û rastkera wê $y = 3$ ye bibîne.

Çareserî:

Rastker bi tewareya XX' re rastênhev eli gorî vê; hevkêşeya parabol bi vî awayî ye $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

Girê parabol di nîvê dûrahiya di navbera nûvend û raskerê de ye, li gorî vê; pêkhateyên lûtkeyê ev in $(-1,+2)$

Nirxê p ji bendekeya $y_0 + p = y_F$ tê dîtin

$P = -1$

Hevkêşeya parabol bi vî awayî dibe

$(x + 1)^2 = -4(y - 2)$

Taybetiyên pêveka parabol

Eger $\mathcal{P}$ parabolek be, M xaleke ji parabolê û rasteka T di xala M re derbas dibe, bi pêkanîna her du mercên li jêr, Rasteka T di xala M de dibe pêveka parabol.

1) Rasteka T bi tewareya hemalî ya parabol re ne rastênhev e.
2) Parabola $\mathcal{P}$ û rasteka T di xaleke tenê de hevbeş in ew jî M ye.

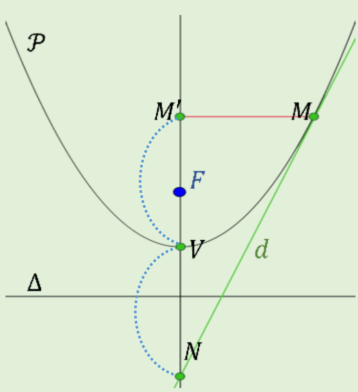
Rasteka ku bi pêveka parabolê re di xala hevbeş de tîk be, jê re **rasteka tîk** ya parabolê di wê xalê de tê gotin

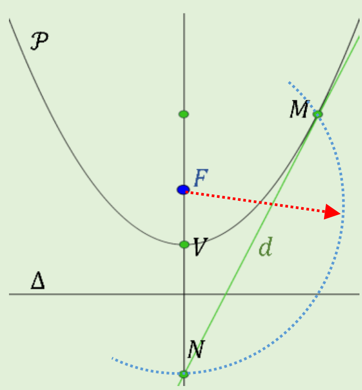
Hin taybetmendiyên pêveka parabolê

Teorî

Eger $\mathcal{P}$ parabol be, Δ rastker, F nîskok, V gir, d tewareya hemalî be û M xalek ji parabolê be.

1) Eger T pêveka $\mathcal{P}$ di xala M de be û tewareya hemalî d di xala N de dibire û M' xala daxistina tîk ya xala M be, wê demê N hemaliya xala M' ye li gorî gir V ye.
   Lê pêveka $\mathcal{P}$ di xala gir V de tîke li ser tewareya hemalî d di V de.
2) T pêveka $\mathcal{P}$ di xala M de, tewareya hemalî d di xala N de dibire û dûrahya di navbera wê û F de yeksanî dûrahya di navbera F û M de, ango $FN = FM$





Têbînî

Em dikarin bi alîkariya daraştinê meyla pêvek bibînin.

Mînak 1:

Eger $y^2 + 2y + 9x - 17 = 0$ hevkêşeya $\mathcal{P}$ be.

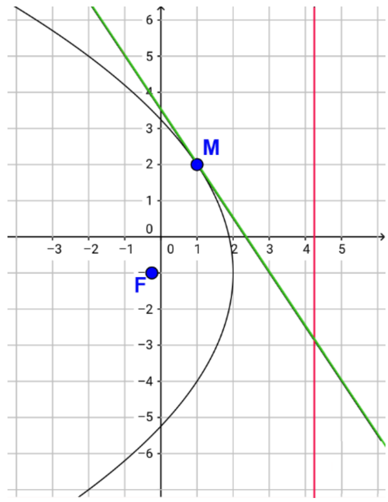
1) Hevkêşeya $\mathcal{P}$ ya asayî bibîne.
2) Hevkêşeya pêvek û ya rasteka tîk yên $\mathcal{P}$ di xala $y = 2$ bibîne û wan tevî parabol xêz bike.

Çareserî:

1) Hevkêşeya $\mathcal{P}$ ya asayî

Bi bidestxistina dama tam, hevkêşe dibe wek awayê $(y+1)^2 = -9(x-2)$, bi hevrûkirina bi hevkêşeya asayî re $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$ tê dîtin ku lûtkeya wê $V(+2,-1)$ e, nîskoka wê $F\left(\frac{-1}{4},-1\right)$, tewareya hemalî bi tewareya XX' re rastênhev e û hevkêşeya wê $y=-1$, hevkêşeya rastker av e $x=\frac{17}{4}$

2) Em $y=2$ di hevkêşeya parabolê de bi cih bikin, li gorî vê; tê dîtin ku $x=3$ û xala pêvek $M(2,1)$ ye, bi daraştina hevkêşeya parabolê $(y+1)^2 = -9(x-2)$ li gorî x, tê dîtin ku $2(y+1)y'_x = -9$, bicihkirina $y=2$ tê dîtin ku $2(2+1)\,m = -9$ li gorî vê meyla pêvek $m = -\frac{3}{2}$, hevkêşeya pêvek $y - y_M = m(x - x_M)$ bicihkirinê $y-2 = -\frac{3}{2}(x-1)$ an jî $3x+2y-7=0$



Mînak 2:

Eger $y = 4x^2 + 4$ hevkêşeya $\mathcal{P}$ be, hevkêşeya pêveka ku meyla wê $m=-8$ bibîne.

Çareserî:

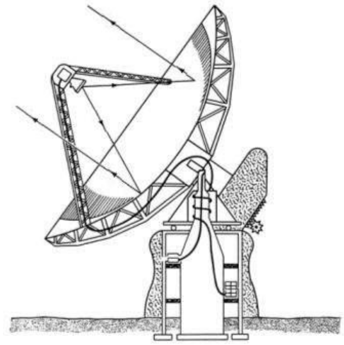
meyla pêvek di xala pêvekê de ev e $y'_x = 8x$

$m=-8 \Longrightarrow -8 = 8x$ li gorê wê $x_M = -1$

Wê demê xala pêvekê ev e; $M(-1,8)$, û ji ber ku $m=-8$

hevkêşeya pêvek ev e; $y-8 = -8(x+1)$ an jî $y+8x=0$

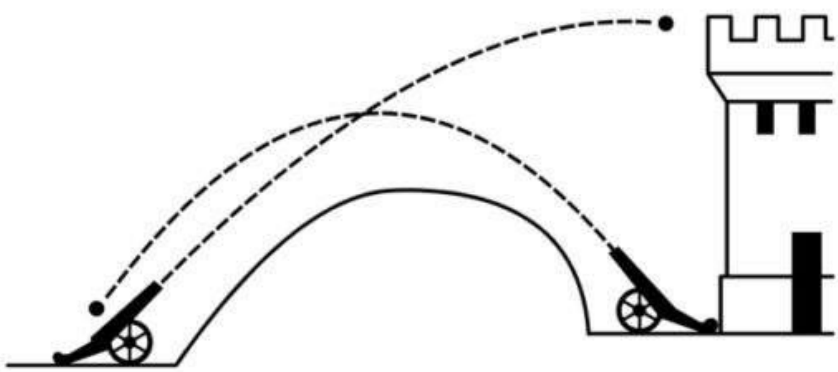
sûdgirtina ji parabolê



Taybetiyeke parabolê ya girîng heye, tîrêjên ku ji nîskokê ber bi parabolê derdikevin ji ruyê parabolê bi awayekî rastênhev vedigerin. Wekî din tîrêjên ku ji derve bi awaykî rastênhev li ser girafîka parabol dikevin, vedigerin û di nîskokêkê de kom dibin.

Ev taybetî di gelek amûrên nûjen de tê bikaranîn, wek teleskop, radar, ronahiya tirimbêlan, satelayt û hwd.

Di warê leşkerî de şopa bombeyan tê naskirin û armanca xwe bi hêsanî pêk tîne.



Hînkirin:

1) Nîskok û rastkera parabolên ku hevkêşeyên wan li jêr in, bibîne û piştre xêz bike.

a) $(y+1)^2 = -6(x-2)$ **b)** $(x-1)^2 = -4(y+2)$

c) $(x+2)^2 = 8(y+1)$ **d)** $y^2 = 4(x-2)$

e) $(y-3)^2 = -20(x+2)$ **f)** $(x-1)^2 - 2(x-2) = 0$

2) Hevkêşeya parabol a ku nîskoka wê $F(9,2)$ e û hevkêşeya rastkera wê $x = 1$ye, bibîne.

3) Hevkêşeya parabol a ku girê wê $V(2,1)$ e, rastkera wê tewareya YY ye, bibîne.

4) Hevkêşeya parabol a ku girê wê $V(1,-2)$ û nîskoka wê $F(1,4)$ e, bibîne.

5) Hevkêşeya parabol a ku di xala $O(0,0)$ û $M(-3,-2)$ re derbas dibe û hevkêşeya rastkera wê $y = 2$ ye, bibîne.

6) Nîskok û rastkera parabolên ku hevkêşeyên wan li jêr in, bibîne û piştre xêz bike.

a) $2y^2 + 8y + x + 1 = 0$ **b)** $y^2 - 8y - 32x - 16 = 0$

c) $x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$ **d)** $x^2 - 14x + 18y - 5 = 0$

e) $y^2 + 2y - 12x + 1 = 0$ **f)** $y^2 - 4y - 8x + 2 = 0$

7) Eger $y^2 = 4(x+y)$ hevkêşeya $\mathcal{P}$ be.

a) lûtke, nîvek û rastker bibîne.

b) hevkêşeya pêvek D ya di xala M de li gorî ku $y_M = -2$ bibîne.

c) Eger pêveka D rastkera Δ di xala H bibire, tekez bike ku her du parçeyên rastekan $[FM]$ û $[FH]$ bi hev re tîk in.

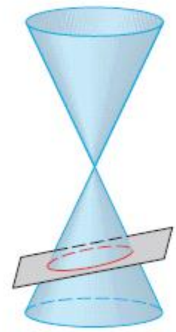
d) hevkêşeya D' pêveka din ya ku bi pêveka D re tîk e, bibîne û xala pêvekê M' bibîne.

e) tekez bike ku xalên M , M' , F li ser heman rastekê ne.

Elîps

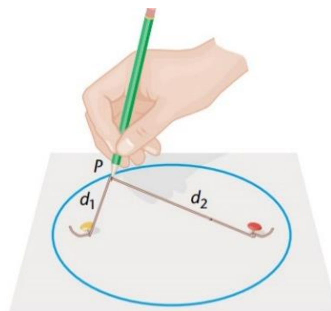
Elîps komika xalên M yên ku komkirina dûrahiya wan ji her du xalên F , F' yeksanî hejmara neguhêr $2a$ ye. ($2a$ dirêjahiya eşkêla nîskokê ye)

Ango $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$



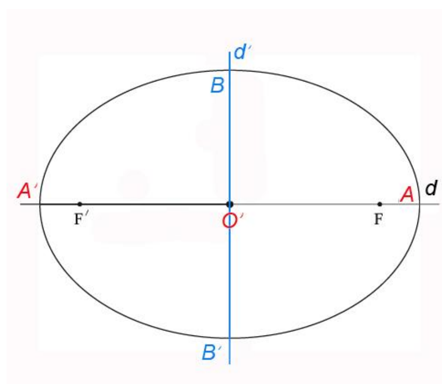
Xêzkirina elîpsê

Em dikarin bi alîkariya pênûs, du bizmar û tayekî, elîpsê xêz bikin. Destpêkê em her du bizmaran li ser kaxezê bi awayê ku ne li rex hev bin bi cih bikin, aliyekî ta bi bizamerekî ve; aliyê din bi bizmarê din ve girê bidin lê divê dirêjahiya ta ji dûrahiya di navbera her du bizmaran de dirêjtir be, bi pênûsê ta bi aliyekî de bişidînin û li derdora bizmaran bizivrînin.



Têbînî:

1) F , F' her du nîskokên elîpsê ne.
2) A , A' her du lûtkeyên elîpsyê ne.
3) O' navenda elîpsyê ye.
4) Rasteka di her du nîskokan re derbas dibe, jê re **tewareya nîskokî** yan jî **tewareya bingehîn** tê gotin.
5) Rasteka d' ya ku dibe tewareya parçeya rastekan FF' , jê re **tewareya nenîskok** yan jî **tewareya nebingehîn** tê gotin.
6) Eger $\mathcal{E}$ elîps be, F , F' her du nîskokên wê bin, nîvê parçeya rastekan FF' dibe **navenda hemaliya** elîpsê, ji ber ku xala



hevbirîna her du tewareyên d û d' ye.

Hevkêşeya elîpsê a hêsan

Eger navenda elîpsê di navenda kordînatê re derbas bibe û tewareya nîskok ya wê $X'OX$ be, li gorî vê; pêkhateyên her du nîskokên wê ev in $F(c,0)$ û $F'(-c,0)$,

li gorî pênaseya elîpsê $M(x,y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (bi damkirinê)

$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ (x+c)^2+y^2$

$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx$ (bi damkirinê)

$$a^2((x+c)^2+y^2) = a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$ (eger $b^2 = a^2-c^2$ be)

$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ (bi parvekirina li ser $b^2a^2 \neq 0$)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad ;\ c > a\ , b > 0 \text{ û } a^2 = b^2+c^2}$$

Ev hevkêşeya elîps a hêsan e, her du nîskokên wê li ser tewareya $X'OX$ ne û navenda wê di navenda kordînatê de ye.

- Dema ku $y^2 = 0$ be, tê dîtin ku $\frac{x^2}{a^2} = 1$ yan jî $x = \mp a$ li gorî vê; her du lûtikyeên elîpsê $A(a,0)$ û $A'(-a,0)$ li ser tewareya $X'OX$ in.
  Em ji parçeya rastekan AA' re dibêjên (eşkêla sereke yan jî mezin) û dirêjahiya wê $2a$ ye.
- Dema ku $x^2 = 0$ be tê dîtin ku $\frac{y^2}{a^2} = 1$ yan jî $y = \mp a$ li gorî vê; her du lûtikyeên elîpsê $B(0,b)$ û $B'(0,\mathrm{b})$ li ser tewareya $Y'OY$ in.
  Em ji parçeya rastekan BB' re dibêjên (eşkêla piçûk) û dirêjahiya wê $2b$ ye.

Mînak 1:
eger $\mathcal{E}$ elîpsa ku hevkêşeya wê $9x^2 + 25y^2 = 225$ be, her du nîskok û girên wê bibîne û piştre xêz bike.

Çareserî:

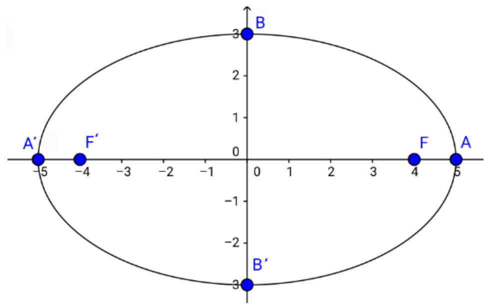
$9x^2 + 25y^2 = 225$ (bi parvekirina li ser 225)

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ev hevkêşeya elîps e ku navenda wê $O(0,0)$ e û

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 16$

her du girên li ser eşkêla mezin ev in $A(5,0)$ û $A'(-5,0)$

her du girên li ser eşkêla biçûk ev in $B(0,3)$ û $B'(0,-3)$



her du nîskokên wê ev in $F(4,0)$ û $F'(-4,0)$

Mînak 2:

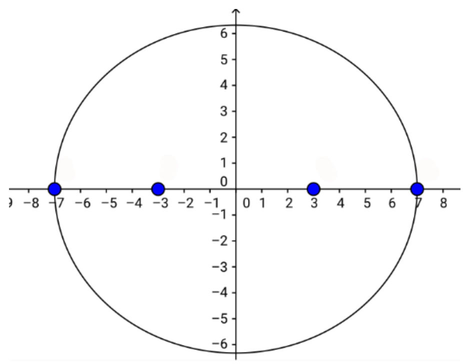
Hevkêşeya elîpsa ku her du girên wê $(\pm 7, 0)$, her du nîskokên wê $(\pm 3, 0)$ bin, bibîne.

Çareserî:

Li gorî agahiyên jor: $a = 7$ û $c = 3$

$b^2 = a^2 + c^2 = 49 - 9 = 40$

wê demê hevkêşeya wê ev e $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1$



Mînak 3:
Eger $\mathcal{E}$ elîpsa ku hevkêşeya wê $12x^2 + 4y^2 = 48$ be, her du nîskok û girên wê, bibîne û piştre xêz bike.

Çareserî:

$12x^2 + 4y^2 = 48$ (bi parvekirina li ser 48)

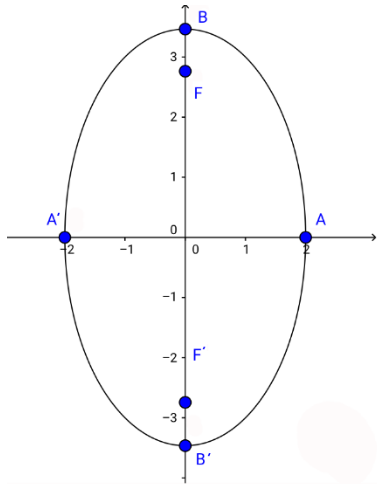
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ ev hevkêşeya elîpsa ku navenda wê $O(0,0)$ e û

$a^2 = 4$, $b^2 = 12$, $c^2 = b^2 - a^2 = 8$

her du girê li ser eşkêla mezin ev in $B(0, 2\sqrt{3})$ û $B'(0, -2\sqrt{3})$

her du girê li ser eşkêla biçûk ev in $A(2, 0)$ û $A'(-2, 0)$

her du nîskokên wê ev in $F(0,2\sqrt{2})$ û $F'(0, -2\sqrt{2})$



Mînak 4:

Elîpsa ku navenda wê $O(0,0)$, her du nîskokên wê $F(3,0)$ û $F'(-3,0)$ in û di xala $M(4,1)$ re derbas dibe, hevkêşeya wê bibîne.

Çareserî:

Em dikarin bi du awayan çareser bikin

Away 1:

$MF = \sqrt{(4-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$MF' = \sqrt{(4+3)^2 + (1-0)^2} = 5\sqrt{2}$

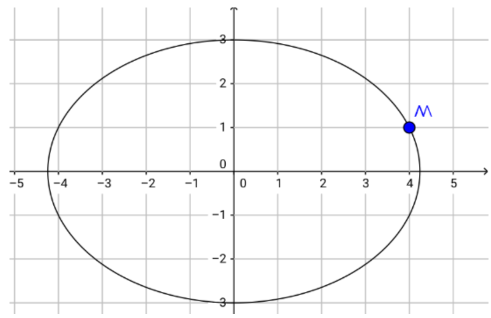
Lê $MF + MF' = 2a \Rightarrow 2a = 6\sqrt{2}$ li gorî vê $a = 3\sqrt{2}$

Ji bo dîtina hevkêşeya elîpsê: $F(3,0)$ û $F'(-3,0)$ bi vî awayî tên nivîsîn $F(c,0)$ û $F'(-c,0)$ wê demê navend $O(0,0)$ e û tewareya nîskok XX' ye û $c = 3$, $b^2 = a^2 - c^2 = 9$ li gorî van; hevkêşeya elîpsê ev e $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

Away 2:

Em dizanin ku hevkêşeya wê bi vî awayî ye $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ li gorî ku $a^2=b^2+c^2$, lê ji ber ku $F'(-3,0)$ wê demê $c=3$ li gorî vê;

$a^2=b^2+9$ (1)



Û ji ber ku xala $M(4,1)$ li ser girafîka elîpsê ye, hevkêşeya wê pêk tîne, ango $\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ (2)

Em (1) di (2) de bi cih bikin

$\frac{16}{b^2+9}+\frac{1}{b^2}=1$ piştî svererastkirinê:

$b^4-8b^2-9=0$ piştî çareserkirinê $b^2=9$ li gorî vê:

$a^2=18$ hevkêşeya elîpsê bi vî awayî çêdibe

$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

Hevkêşeya asayî ya elîpsa ku navenda wê $O(0,0)$ û tewareya wê ya nîskok li ser yek ji her du tewareyên kordînatê ye, bi vî awayî ye

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a\neq b$ ye.

a) Dema ku $a>b$ be, wê demê tewareya nîskok li ser OX e, her du gir li ser eşkêla mezin $(a,0)$ û $(-a,0)$ in û dirêjahiya wê $2a$ ye, her du gir li ser eşkêla biçûk $(0,b)$ û $(0,-b)$ ne û dirêjahiya wê $2b$ ye û her du nîskokên wê $(c,0)$ û $(-c,0)$ in li gorî ku $c^2=a^2-b^2$ e.

b) Dema ku $a<b$ be, wê demê tewareya nîskok li ser OY ye, her du gir li ser eşkêla mezin $(0,b)$ û $(0,-b)$ in û dirêjahiya wê $2b$, her du gir li ser eşkêla biçûk $(a,0)$ û $(-a,0)$ in û dirêjahiya wê $2a$ ye û her du nîskokên wê $(0,c)$ û $(0,-c)$ in li gorî ku $c^2=b^2-a^2$ e

Hevkêşeya giştî ya elîpsa ku tewareya wê ya nîskok bi yek ji tewareyên kordînatê re rastênhev e

Eger $O'(x_0, y_0)$ navenda elîpsa ku tewareya wê ya nîskok bi yek ji tewareyên kordînata $(O, \vec{i}, \vec{j})$ re rastênhev be, wê demê hevkêşeya wê bi vî awayî ye:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.

Lê zagonên guhertina ji sîstema $O'(x_0, y_0)$ ber bi sîstema $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ve ev in $X = x - x_0$ û $Y = y - y_0$

Li gorî van; hevkêşeya elîpsê di sîstema $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de bi vî awayî çêdibe $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.

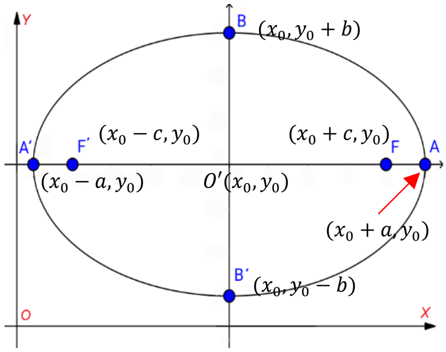
Hevkêşeya elîpsa ku navenda wê ne navenda kordînatê ye

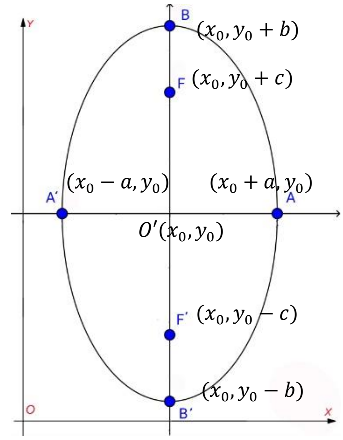
Hevkêşeya asayî ya elîpsa ku navenda wê $O'(x_0, y_0)$ û tewareya wê ya nîskok bi yek ji tewareyên kordînatê re rastênhev e, bi vî awayî ye.

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.

a) Dema ku $a > b$ be, wê demê tewareya nîskok bi OX re rastênhev e, her du gir li ser eşkêla mezin $(x_0 + a, y_0)$ û $(x_0 - a, y_0)$ in û dirêjahiya wê $2a$ ye, her du gir li ser eşkêla biçûk $(x_0, y_0 + b)$ û $(x_0, y_0 - b)$ ne û dirêjahiya wê $2b$ ye û her du nîskokên wê $(x_0 + c, y_0)$ û $(x_0 - c, y_0)$ in li gorî ku $c^2 = a^2 - b^2$ e.

b) Dema ku $a < b$ be, wê demê tewareya nîskok bi OY re rastênhev e, her du gir li ser eşkêla mezin $(x_0, y_0 + b)$ û $(x_0, y_0 - b)$ ne û dirêjahiya wê $2b$ ye, her du gir li ser eşkêla biçûk $(x_0 + a, y_0)$ û $(x_0 - a, y_0)$ in û dirêjahiya wê $2a$ ye û her du nîskok wê $(x_0, y_0 + c)$ û $(x_0, y_0 - c)$ in li gorî ku $c^2 = b^2 - a^2$ e.





Dema ku $a > b$ be **Dema ku $a < b$ be**

Mînak 1:

Eger $4x^2 - 8x + y^2 + 4y - 8 = 0$ hevkêşeya elîpsekê be, lûtike û her du nîskokên wê bibîne.

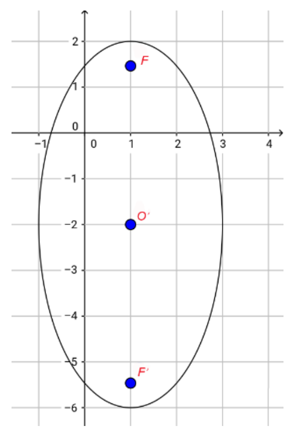
Çareserî:

Destpêkê em hevkêşeyê bi riya bidesxistina dama tam vegerînin li awayê asayî

$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 8 + 4\times1 + 4$$

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

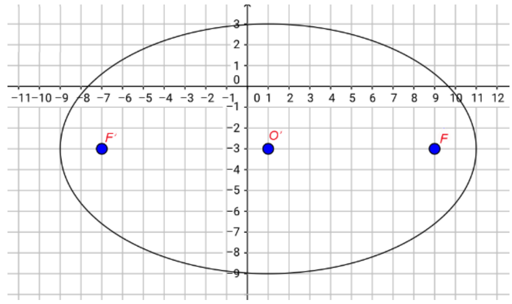


Ji bendekeya dawî tê dîtin ku navenda elîps $O'(1,-2)$ e, $a = \sqrt{4} = 2$, $b = \sqrt{16} = 4$ lê ji ber ku $a < b$ tewareya wê ya nîskok bi tewareya kordînatê re rastênhev e û hevkêşeya wê $x = 1$ ye, her du lûtkeyên li ser eşkêla mezin $(1, 2)$ û $(1, -6)$ ye, her du lûtkeyên li ser eşkêla biçûk $(3, -2)$ û $(-1, -2)$ e.

Ji bendekeya $c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ her du nîskok tên bidestxistin $F(1, -2 + 2\sqrt{3})$, $F'(1, -2 - 2\sqrt{3})$.

Mînak 2:

Hevkêşeya elîpsa ku her du nîskokên wê $F(9,-3)$, $F'(-7,-3)$ bin û yek ji lûtkeyên wê li ser xala $A(1,-3)$ bin, bibîne.



Çareserî:

Hevkêşeya tewareya nîskok $y=-3$ e, li gorî vê; ew bi OX re rastênhev e û navenda elîps O' li ser nîvê parçeya rastekan FF' ye, wê demê $O'(1,-3)$ e,

$c=\frac{1}{2}FF'=8$ û $a=O'A=10$

li gorî van; $b^2=a^2-c^2=100-64=36$

Hevkêşeya elîpsê ev e. $\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$

Taybetiyên pêveka elîpsê

- Eger $\mathcal{E}$ elîpsek be, d rastekek be û xaleke tenê M hevbeş di navbera elîps û rasteka d de be, wê demê rasteka d di xala M de pêveka elîpsê ye.
- Rasteka ku di xala pêvek de li ser pêvek tîk be, jê re **rasteka tîk ya elîpsê** tê gotin.

Teorî

Eger $\mathcal{E}$ elîpsek be, F û F' her de nîskokên wê bin, dirêjahiya eşkêla mezin 2ℓ be û M xalek be ji elîpsê ne li ser eşkêla mezin be.

1) Pêveka d ya elîpsê di xala M de tewareya parçeya rastekan $[FM']$ e, li gorî ku M' xaleke ji nîvrasteka $[F'M]$ ya ku $F'M'=2\ell$ pêk tîne ye.
2) Rasteka tîk d' ya elîpsa $\mathcal{E}$ di xala M de nîskoka hundirîn ya qiraça $F'MF$ ye.

Hevkêşeya pêveka elîpsê di xalekê de ji bilî xalên gir

Hevkêşeya elîpsa $\mathcal{E}$ ya ku tewareya wê bi yek ji tewareyên kordînatê re rastênhev e bi awayekî giştî ev e

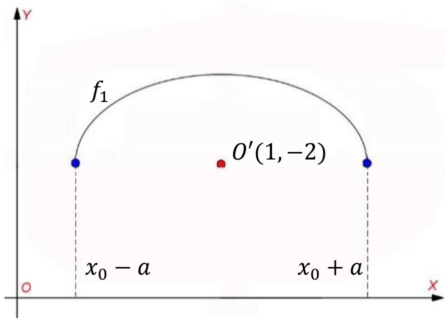
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, li gorî vê; $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\le 1$ û $x\in[x_0-a,x_0+a]$

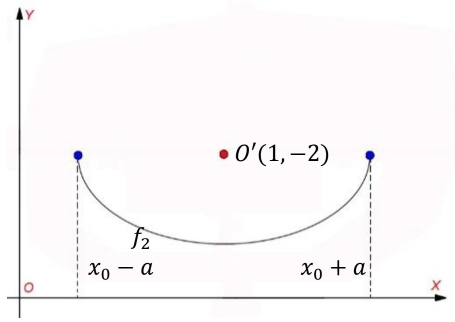
Em dikarin $\mathcal{E}$ wek yekgirtina du girafîkan $\mathcal{E}_1$ û $\mathcal{E}_2$ yên du fonksiyonan f_1 û f_2 yên di navbera $[x_0-a,x_0+a]$ de li gorî her du bendekeyên li jêr bibînin.

$$y=f_1(x)=y_0+b\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$y=f_2(x)=y_0-b\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

Di her du awayên li jêr de diyar in.





Tê dîtin ku her du fonksiyon di navbera vekirî $I=]x_0-a,x_0+a[$ de daraştî ne û eger $M(u,v)$ xalek ji $\mathcal{E}$ be ji bilî her du girê (x_0+a,y_0) û (x_0-a,y_0), wê demê du rewş hene:

1) Xala M endamê parçeya jor ya $\mathcal{E}$ ye, ango $M\in\mathcal{E}_1$ li gorî vê;
   $v=f_1(u)$ û $u\in I$
   ji bo dîtina meyla pêvek $\mathcal{E}_1$ di xala M de ango hejmara daraştî
   $M=f_1'(u)$ dema ku $x\in I$
   $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(f_1(x)-y_0)^2}{b^2}=1$ bi daraştinê; $\frac{2(x-x_0)}{a^2}+\frac{2(f_1(x)-y_0)f_1'(x)}{b^2}=0$

   $$\boxed{m=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{u-x_0}{v-y_0}}$$

   (ji ber ku M ne li ser girê elîpsê ye, tê dîtin ku $v\neq y_0$ e).

2) Xala M endamê parçeya jêr ya $\mathcal{E}$ ye, ango $M \in \mathcal{E}_2$ li gorî vê;
$v = f_2(u)$ û $u \in I$
ji bo dîtina meyla pêvek $\mathcal{E}_2$ di xala M de ango hejmara daraştî
$M = f_2'(u)$ dema ku $x \in I$
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(f_2(x)-y_0)^2}{b^2} = 1$ bi daraştinê;
$\frac{2(x-x_0)}{a^2} + \frac{2(f_2(x)-y_0)f_2'(x)}{b^2} = 0$

$$\boxed{m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u-x_0}{v-y_0}}$$

Tê dîtin ku heman bendeke tê bidestxistin, heman encam ji daraştina hevkêşeya elîpsê piştî veguhertina y wek fonksiyoneke girêdayî bi x ve, tê bidestxistin.

Mînak:

Eger $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$ hevkêşeya elîpsekê be.

1) Navend û her çar girên elîpsê bibîne, piştire xêz bike.

2) Hevkêşeya pêveka elîpsê di xala $N\left(\frac{4}{5}, 6\right)$ de bibîne.

Çareserî:

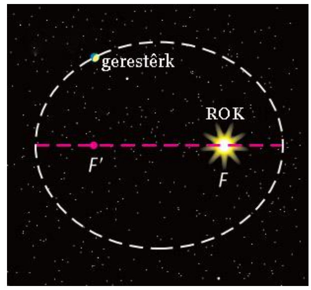
1) $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 146 = 0$ bi bidestxistina dama tam
$25(x^2 + 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) - 164 = 0$
$25(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 164 + 25\times1 + 9\times4$
$25(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 225$
$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$
Ji bendekeya dawî tê dîtin ku navenda elîps $O'(-1,2)$ e,her çar lûtkeyên wê evên $(2,2)$ û $(-4,2)$ $(-1,7)$ û $(-1,-3)$ $a = 2$, $b = 5$ lê ji ber ku $a < b$ tewareya wê ya nîskok bi tewareya kordînatê re rastênhev e û hevkêşeya wê $x = -1$ e, Ji bendekeya $c^2 = b^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$ her du nîskok tên bidestxistin $F(-1,6)$, $F'(-1,-2)$

2) Ji bo dîtna meyla pêvek m dixala M de, bi daraştina hevkêşeya elîpsê li gorî x, tê dîtin ku:
$50x + 18y\, y_x' + 50 - 36\, y_x' = 0$, bicihkirina xala $N\left(\frac{4}{5}, 6\right)$ tê dîtin ku $40 + 108m + 50 - 36 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{4}$

Hevkêşeya pêvek di xala M de eve: $y - 6 = -\frac{5}{4}(x - \frac{4}{5})$

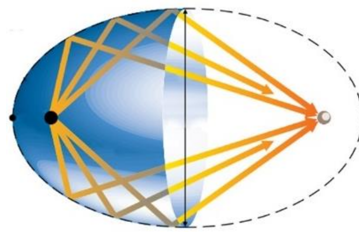
$d: y - 6 = -\frac{5}{4}x + 7$

Cara yekem zanyarê elmanî **Kepler** (1571-163) nas kir ku gerestêrk bi awayê elîps li derdora rokê dizivirin û rok yek ji her du nîskokên elîpsê ye.



sûdgirtina ji elîpsê

Taybetiyeke elîpsê ya girîng heye, tîrêjên ku ji yek ji nîskokên wê ber bi ruyê elîpsê ve derkevin, di nîskoka din re kom dibin,



Ev taybetî di tenduristiyê de tê bikaranîn, bi taybetî ji bo hûrkirina kevirên di gurçikan de. Nîskokeke elîpsê li ser kevirên di gurçikan de tê bicihkirin û di nîskoka din de pêlên deng yên xurt tên vedan, bi vî awayî pêl hemû li ser keviran kom dibin û wan dişikînin. Wekî din di avakirina piran de tê bikaranîn.

Hinkirin:

1) Nîskok û girên elîpsên ku hevkêşeyên wan li jêr in, bibîne û piştre xêz bike.

a) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ **b)** $\frac{(x+5)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$

c) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{64}=1$ **d)** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

e) $(x-2)^2+\frac{(y+1)^2}{36}=1$ **f)** $\frac{(x+3)^2}{9}+(y+1)^2=1$

2) Hevkêşeya elîpsa ku her du nîskokên wê $F(4,0)$, $F'(-4,0)$ û lûtikek wê $A(5,0)$ bibîne.

3) Hevkêşeya elîpsa ku navenda wê $O'(1,-3)$ e, yek ji nîskokên wê $F(5,-3)$ û nîskokeke wê $A(6,-3)$ be bibîne.

4) Hevkêşeya elîpsa ku her du nîskokên wê $F(-3,10)$, $F'(-3,-6)$ û dirêjahiya eşkêla biçûk 12 be, bibîne.

5) Hevkêşeya elîpsa ku di xala $N(4,2\sqrt{3})$ re derbas dibe û her du xalên $(1,0),(5,0)$ girê wê ne, bibîne.

6) Hevkêşeya elîpsa ku di her du xalên $(-3,1),(2,-2)$ re derbas dibe, navenda wê $O(0,0)$ e, bibîne.

7) Nîskok û lûtikekên elîps ku hevkêşeyên wan li jêr in, bibîne û piştre xêz bike.

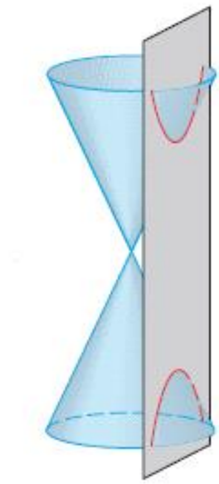
a) $4x^2+3y^2-16x+18y=-31$

b) $2x^2+3y^2+4x+6y-1=0$

c) $9y^2+4x^2+36y-24x+36=0$

d) $4y^2+x^2-24y+4x+24=0$

HÎPERBOL

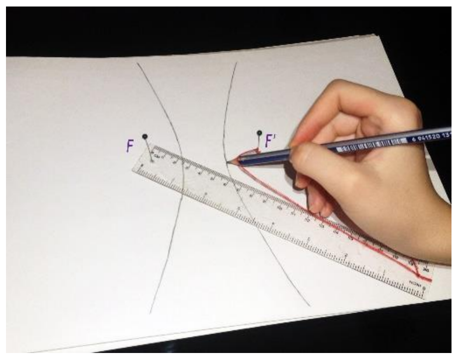


Pênaseya hîperbol dişibe ya parabol lê li şûna nîskokekê, du nîskok hene.

Eger F û F' du xal bin di teqaleyê de be, ji komika xalên ku nirxê teqez yê ferqa dûrahiya wan ji her du xalên F û F' yên tam pozîtîf re **hîperbol** tê gotin. F û F' her du nîskokên hîperbol in, sembola wê $\mathcal{H}$ ye.

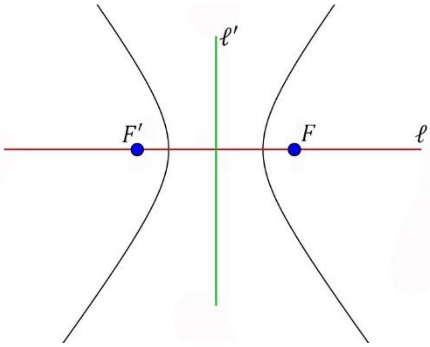
Xêzkirina hîperbolê

Ji bo xêzkirinê pêwîstiya me bi rastkêş, du bizmar, ta, kerton û pênûsekê heye.



Destpêkê em her du bizmaran li ser kertonê di du xalên cuda de F û F' bi cih bikin, aliyekî rastkêşê li ser xala F' bi cih bikin, em tayekî ji rastkêşê kintir bi aliyê din yê rastkêşê ve bikin û aliyê din yê ta bi bizmarê li ser xala F ve bi cih bikin, niha bi pênûsê; ta bi ser rastkêşê de tehf bidin heta ku ta bişide û pênûsê li derdora F' bizvirînin, bi vî awayî pênûs parçeyekî hîperbol xêz dike. Bi heman awayî em dikarin aliyê din yê hîperbol bi guhertina cihên rastkêş û ta di navbera her du xalên F û F' de xêz bikin.

Eger $\mathcal{H}$ hîperbol be, F û F' her du nîskokên wê bin, rasteka ℓ ya ku di her du nîskokan re derbas dibe, jê re **tewareya nîskok** tê gotin, û rasteka ℓ' ya ku tewareya parçeya rastekan $[FF']$ jê re **tewareya nenîskok** tê gotin.

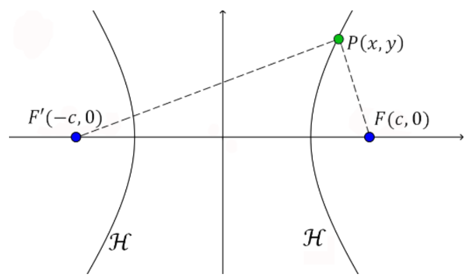


Eger $\mathcal{H}$ hîperbol be, F û F' her du nîskokên wê bin, nîvê parçeya rastekan $[FF']$dibe navenda hemalî ya hîperbolê û jê re **navenda hîperbol** tê gotin û ji parçeya rastekan $[FF']$ re **dirêjahiya nîskok** tê gotin.

Hevkêşeya sade ya hîperbol

Eger $\mathcal{H}$ hîperbol be, F û F' her du nîskokên wê bin û navenda kordînatê li ser navenda hîperbol be, tewareya OX li ser tewareya nîskok be, $F(c, 0)$ û $F'(-c, 0)$ be, dûrahiya di navbera her du nîskokan de $2c$ be (dirêjahiya nîskok).

Eger P xalek be ji $\mathcal{H}$ li gorî ku $2a = |F'P - FP|$ li gorî newekheviya di sêgoşeya PFF' de:



$2c = FF' > |F'P - FP| = 2a$ ango $c > a$

Bi pêkanîna mercê $|F'P - FP| = 2a$, xala $P(x, y)$ dibe endama $\mathcal{H}$ ango;

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$ yan;

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Bi damkirina her du aliyan;

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Longrightarrow$$

$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$ careke din bi damkirina her du aliyan

$$a^2((x+c)^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \Longrightarrow$$

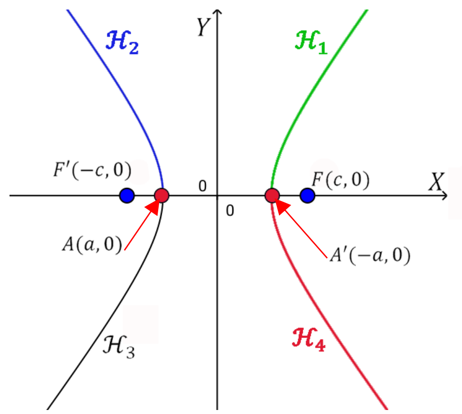
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Eger $b=\sqrt{c^2-a^2}$ be û bi parvekirina her du aliyan li ser a^2b^2 bendekeya li jêr tê bidestxistin

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ; 0<b\ , a<c\ \text{ û }\ a^2+b^2=c^2}$$

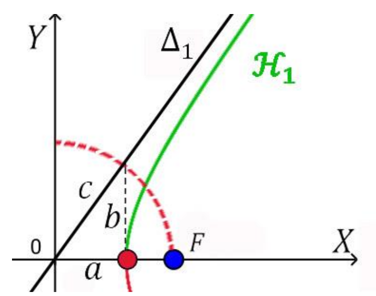
Ev hevkêşeya sade ya hîperbol ya ku her du nîskokên wê li ser OX in û navenda wê navenda kordînatê ye.

Her du rastekên nêzîker yên hîperbol



Girafîka hevkêşeya $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ya $\mathcal{H}$ ne ya fonksiyonekê ye, ji ber vê yekê em girafîkê li gorî her çar çarîkan parçe bikin $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ û $\mathcal{H}_4$ wek awayê li kêlekê tê dîtin ku $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2\cup\mathcal{H}_3\cup\mathcal{H}_4$

Em dest bi çarîka yekem bikin û fonksiyona girafîka wê $\mathcal{H}_1$ bibînin.



Navbera vê fonksiyonê $[a,+\infty[$ ye eger $x\geq a$ be wê demê

$$(f_1(x))^2=y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$$

Ji ber ku $f_1(x)\geq 0$ hat dîtin ku

$f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ li gorî vê; $\mathcal{H}_1$ girafîka fonksiyona $x\longmapsto f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ di navbera $[a,+\infty[$ de ye.

Dema ku $x\geq a$ be wê demê

$$f_1(x)-\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\left(\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right)$$

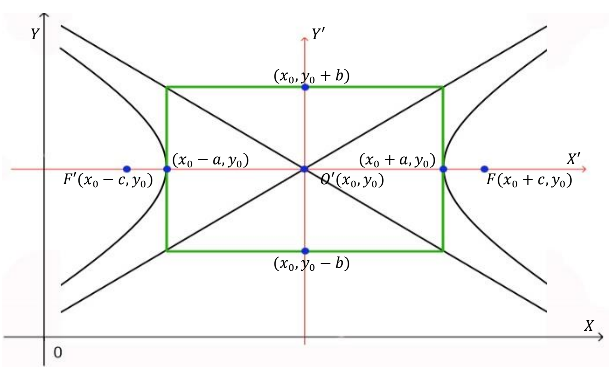
$=\frac{-ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$ ev ji aliyekî ve tekez dike ku $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f_1(x)-\frac{b}{a}x\right)=0$

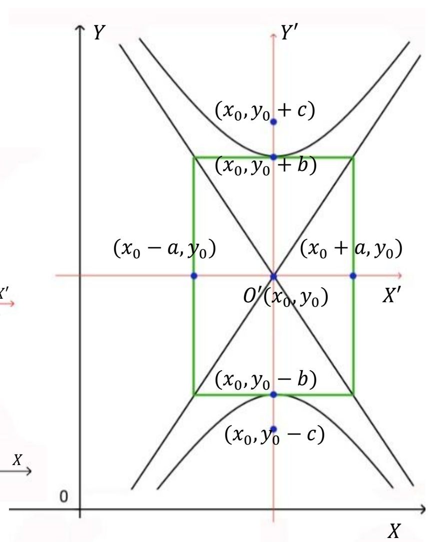
Rasteka Δ_1 ya ku hevkêşeya wê $y = \frac{b}{a}x$ nêzîkera $\mathcal{H}_1$ e li rex $+\infty$ ji aliyê din ve $f_1(x) - \frac{b}{a}x < 0$; $x \in [a, +\infty[$ li gorî vê; $\mathcal{H}_1$ her tim li bin xêza nêzîker Δ_1 e.

Hevkêşeya asayî ya hîperbola ku navenda wê $O(0,0)$

1) Hevkêşeya asayî ya hîperbola ku navenda wê $O(0,0)$ e û tewareya wê ya nîskok li ser tewareya OX e, bi vî awayî ye.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.
Her du girên li ser tewareya nîskok $(a, 0)$ û $(-a, 0)$ in, her du girên alîkar $(0, b)$ û $(0, -b)$ ne û her du nîskokên wê $(c, 0)$ û $(-c, 0)$ in li gorî ku $c^2 = a^2 + b^2$ e.

2) Hevkêşeya asayî ya hîperbola ku navenda wê $O(0,0)$ û tewareya wê ya nîskok li ser tewareya OY ye, bi vî awayî ye.
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.
Her du girên li ser tewareya nîskok $(0, b)$ û $(0, -b)$ ne, her du girên alîkar $(a, 0)$ û $(-a, 0)$ in û her du nîskokên wê $(0, c)$ û $(0, -c)$ ne li gorî ku $c^2 = a^2 + b^2$ e.
Di her du rewşan de her du nîzikerên hîperbol hene,
Hevkêşeyên her duyan ev in:
$\Delta_1: \frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ û $\Delta_2: \frac{y}{b} = -\frac{x}{a}$

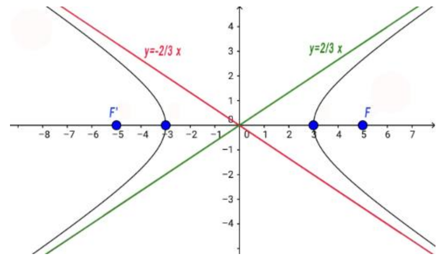




Mînak 1:

Nîskok û hevkêşeyên her du nêzîkerên hîperbola ku hevkêşeya wê $4x^2 - 9y^2 = 36$ e, bibîne û piştre xêz bike.

Çareserî:



$4x^2 - 9y^2 = 36$

(bi parvekirina li ser 36)

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ev hevkêşeya hîperbola ku navenda wê $O(0,0)$ e û hevkêşeyên her du nêzîkerên wê ev in $y = \pm\frac{2}{3}x$

$a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$

her du girên li ser tewareya nîskokê ev in $A(3,0)$ û $A'(-3,0)$

her du girên alîkar ev in $B(0,2)$ û $B'(0,-2)$

her du nîskokên wê ev in $F(5,0)$ û $F'(-5,0)$

Mînak 2:

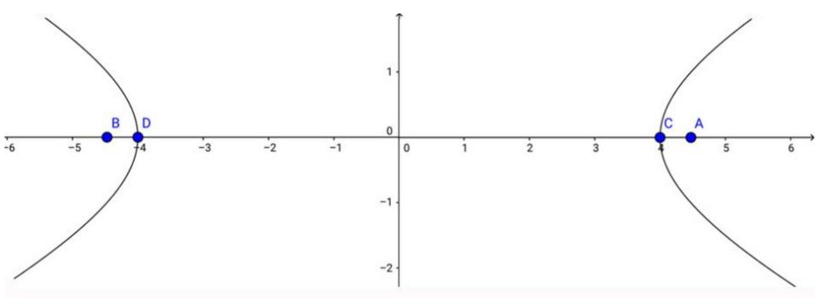
Hevkêşeya hîperbola ku her du girên wê $(\pm 4, 0)$ in, her du nîskokên wê $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ in, bibîne.

Çareserî:

Li gorî agahiyên li jor: $a = 4$ û $c = 2\sqrt{5}$

$b^2 = c^2 - a^2 = 20 - 16 = 4$

wê demê hevkêşeya wê ev e $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$



Hevkêşeya giştî ya hîperbola ku tewareya wê ya nîskok bi yek ji tewareyên kordînatê re rastênhev e

Eger $O'(x_0, y_0)$ navenda hîperbola ku tewareya wê ya nîskok bi yek ji tewareyên kordînata $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ re rastênhev be, wê demê hevkêşeya wê bi vî awayî ye:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in û $a \neq b$ ye.

Lê zagonên guhertina ji sîstema $O'(x_0, y_0)$ ber bi sîstema $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ve ev in $X = x - x_0$ û $Y = y - y_0$

Li gorî van; hevkêşeya hîperbol di sîstema $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de bi vî awayî çêdibe $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in.

Hevkêşeya hîperbola ku navenda wê ne navenda kordînatê ye

Hevkêşeya asayî ya hîperbola ku navenda wê $O'(x_0, y_0)$ û tewareya wê ya nîskok bi tewareya OX re rastênhev e, bi vî awayî ye.

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf in.

her du girên li ser tewareya nîskok $(x_0 + a, y_0)$ û $(x_0 - a, y_0)$ in, her du girên alîkar $(x_0, y_0 + b)$ û $(x_0, y_0 - b)$ ne û her du nîskokên wê $(x_0 + c, y_0)$ û $(x_0 - c, y_0)$ in li gorî ku $c^2 = a^2 + b^2$ e.

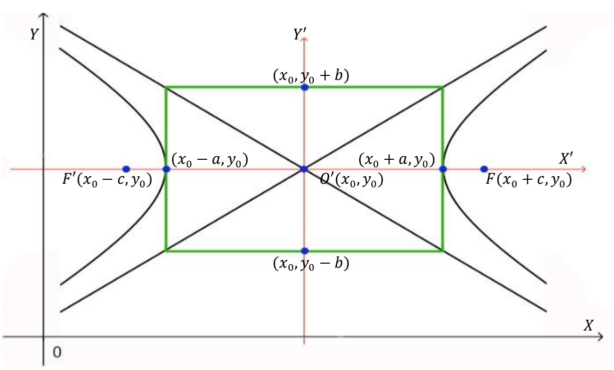
Hevkêşeya asayî ya hîperbola ku navenda wê $O'(x_0, y_0)$ û tewareya wê ya nîskok bî tewareya Oy re rastênhev e, bi vî awayî ye.

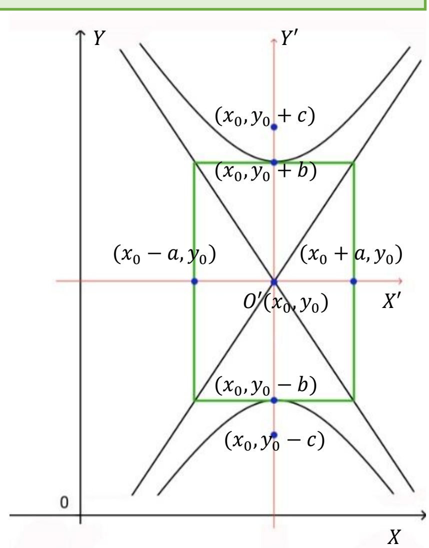
$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$; a û b du hejmarên pozîtîf bin.

her du girên li ser tewareya nîskok$(x_0, y_0 + b)$ û $(x_0, y_0 - b)$ ne, her du girên alîkar $(x_0 + a, y_0)$ û $(x_0 - a, y_0)$ in û her du nîskokên wê $(x_0, y_0 + c)$ û $(x_0, y_0 - c)$ ne li gorî ku $c^2 = a^2 + b^2$ e.

Di her du rewşan de her du nîzikerên hîperbol hene, Hevkêşeyên her duyan ev in:

$$\Delta_1: \frac{y-y_0}{b} = \frac{x-x_0}{a} \quad \text{û} \quad \Delta_2: \frac{y-y_0}{b} = -\frac{x-x_0}{a}$$





Mînak 1:

Eger $16x^2 - 64x - 9y^2 - 36y - 116 = 0$ hevkêşeya hîperbol be, gir û her du nîskokên wê bibîne.

Çareserî:

Destpêkê em hevkêşeyê bi riya bidesxistina dama tam li awayê asayî vegerînin.

$16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 4y + 4) = 116 + 64 - 36$

$16(x-2)^2 - 9(y+2)^2 = 144$

$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

Ji bendekeya dawî tê dîtin ku navenda hîperbolê $O'(2,-2)$ ye, tewareya wê ya nîskok bi tewareya OX re rastênhev e.

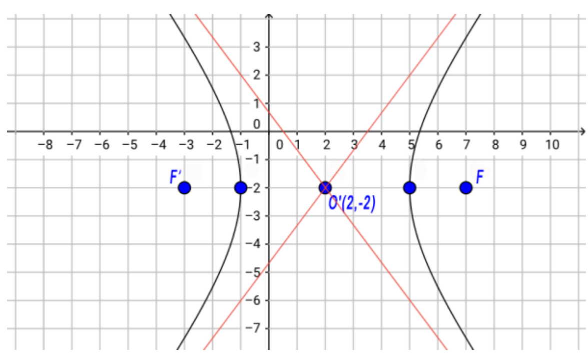
$a = \sqrt{9} = 3$, $b = \sqrt{16} = 4$ her du girên li ser tewareya nîskok $(5,-2)$ û $(-1,-2)$ ne.

her du girên alîkar $(3,-2)$ û $(-1,-2)$ ne.

Ji bendekeya $c^2 = a^2 + b^2 = 25$ her du nîskok tên bidestxistin $F(7,-2)$, $F'(-3,-2)$.

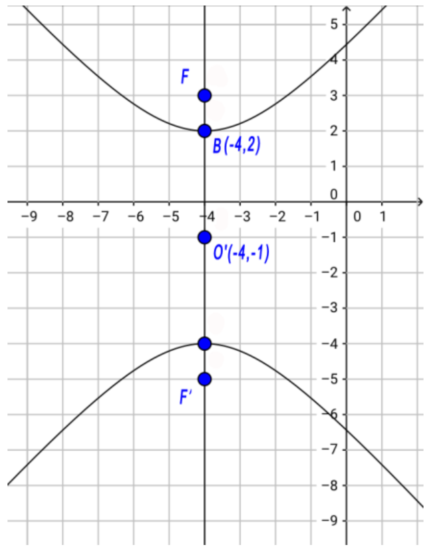
Hevkêşeyên her du nêzîkerên wê: $\frac{y+2}{4} = \pm\frac{x-2}{3}$ yan ji

$3y - 4x + 14 = 0$ û $3y + 4x - 2 = 0$



Mînak 2:

Hevkêşeya hîperbola ku her du nîskokên wê $F(-4,3)$, $F'(-4,-5)$ bin û yek ji girên wê li ser xala $B(-4,2)$ be, bibîne.



Çareserî:

Hevkêşeya tewareya nîskok $x=-4$ e, li gorî vê; ew bi OX re rastênhev e û navenda hîperbolê O' li ser nîvê parçeya rastekan FF' e, wê demê $O'(-4,-1)$ e,

$c=\frac{1}{2}FF'=4$ û $b=O'B=3$

li gorî van; $a^2=c^2-b^2=\sqrt{7}$

Hevkêşeya hîperbolê ev e $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+4)^2}{7}=1$

Taybetiyên pêveka hîperbolê

- Eger $\mathcal{H}$ hîperbol be, d rastekeke ku bi yek ji her du nêzîkerên $\mathcal{H}$ re ne rastênhev be û xaleke tenê M hevbeş di navbera hîperbol û rasteka d de be, wê demê rasteka d di xala M de pêveka hîperbol e.
- Rasteka ku di xala pêvek de li ser pêvek tîk be, jê re **rasteka tîk ya hîperbol** tê gotin.

Teorî

Eger $\mathcal{H}$ hîperbol be, F û F' her de nîskokên wê bin, dirêjahiya eşkêla mezin 2ℓ be û M xalek ji hîperbol ya nêzîkî F be lê ji gir cuda be.

1) Pêveka hîperbol d ya di xala M de tewareya parçeya rastekan $[FM']$ e, li gorî ku M' xaleke ji nîvrasteka $[F'M]$ ya ku $F'M'=2\ell$ pêk tîne ye.
2) Pêveka hîperbol d ya di xala M de nîveka hundirîn ya qiraça $F'MF$ ye.

Hevkêşeya pêveka hîperbol di xalekê de ji bilî xalên gir

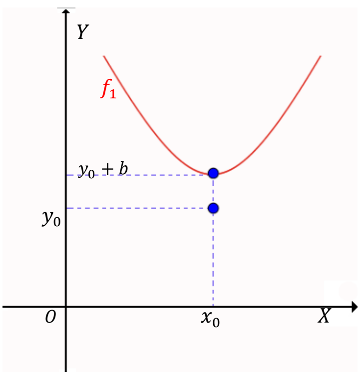
Hevkêşeya hîperbola $\mathcal{H}$ ya ku tewareya wê bi tewareya OX re rastênhev e bi awayekî giştî ev e: $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$

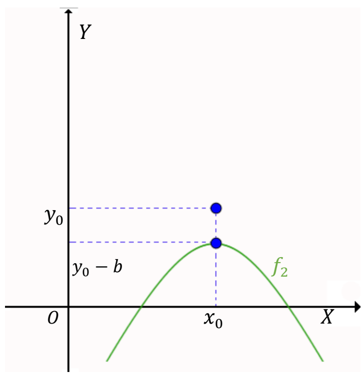
Em dikarin $\mathcal{H}$ wek yekgirtina du girafîkan $\mathcal{H}_1$ û $\mathcal{H}_2$ yên du fonksiyonên f_1 û f_2 yên di $\mathbb{R}$ de li gorî her du bendekeyên li jêr bibînin.

$$y = f_1(x) = y_0 + b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

$$y = f_2(x) = y_0 - b\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$$

Di her du awayên li jêr de diyar in.





Tê dîtin ku di $\mathbb{R}$ de her du fonksiyon daraştî ne û eger $M(u, v)$ xalek ji $\mathcal{H}$ be (M xalek ji beşê jor $\mathcal{H}_1$ yan jî ji beşê jêr $\mathcal{H}_2$ be) wê demê du rewş hene:

1) Xala M endamê parçeya jor ya $\mathcal{H}$ ye ango $M \in \mathcal{H}_1$ li gorî vê;
$v = f_1(u)$ û $u \in I$
ji bo dîtina meyla pêvek $\mathcal{E}_1$ di xala M de ango hejmara daraştî $M = f_1'(u)$ dema ku $x \in I$
$\frac{(f_1(x)-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ bi daraştinê; $\frac{2(f_1(x)-y_0)f_1'(x)}{b^2} - \frac{2(x-x_0)}{a^2} = 0$

$$\boxed{m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u-x_0}{v-y_0}}$$

(Tê dîtin ku $v \neq y_0$ e, ji ber ku M ne li ser girê hîperbolê ye).

2) Xala M endamê parçeya jêr ya $\mathcal{H}$ ye ango $M \in \mathcal{H}_2$ li gorî vê;
$v = f_2(u)$ û $u \in I$
ji bo dîtina meyla pêvek $\mathcal{H}_2$ di xala M de ango hejmara daraştî $M = f_2'(u)$ dema ku $x \in I$
$\frac{(f_2(x)-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$ bi daraştinê; $\frac{2(f_2(x)-y_0)f_2'(x)}{b^2} - \frac{2(x-x_0)}{a^2} = 0$

$$\boxed{m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{u-x_0}{v-y_0}}$$

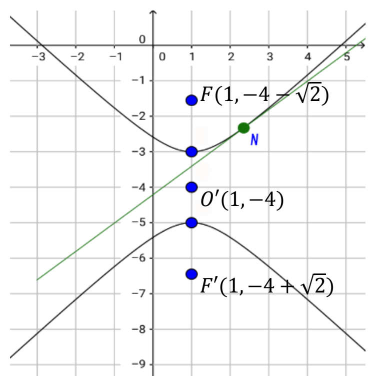
Tê dîtin ku heman bendeke tê bidestxistin, heman encam ji daraştina hevkêşeya hîperbol piştî veguhertina y wek fonksiyoneke girêdayî bi x ve, tê bidestxistin.

Mînak:

Eger $y^2 + 8y - x^2 + 2x + 14 = 0$ hevkêşeya hîperbol be.

1) Navend û her çar girên hîperbol bibîne, piştre xêz bike.
2) Hevkêşeya pêveka hîperbolê di xala $N\left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ de bibîne.

Çareserî:



1) $y^2 + 8y - x^2 + 2x + 14 = 0$
bi bidestxistina dama tam $(y+4)^2 - (x-1)^2 = 1$
Ji bendekeya dawî tê dîtin ku navenda hîperbol $O'(1, -4)$ e, $a = b = 1$, tewareya wê ya nîskok bi tewareya Oy re rastênhev e û hevkêşeya wê $x = -1$ e, her du lûtkeyên wê evên $(1, -5)$ û $(1, -3)$,
Ji bendekeya $c^2 = a^2 - b^2 = 2$ her du nîskok tên bidestxistin $F\left(1, -4 - \sqrt{2}\right)$, $F'\left(1, -4 + \sqrt{2}\right)$

2) Ji bo dîtna meyla pêvek m di xala N de, bi daraştina hevkêşeya hîperbol li gorî x, tê dîtin ku:
$2yy_x' + 8y_x' - 2x + 2 = 0$, bicihkirina xala $N\left(\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ tê dîtin ku
$\left(-\frac{7}{3} + 4\right)m = \frac{7}{3} - 1 \Rightarrow m = \frac{4}{5}$
Hevkêşeya pêvek di xala N de ev e: $y + \frac{7}{3} = \frac{4}{5}\left(x - \frac{7}{3}\right)$

Hinkirin:

1) Nîskok û girên hîperbolên ku hevkêşeyên wan li jêr in, bibîne û piştre xêz bike.

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ **b)** $x^2-16y^2=144$

c) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$ **d)** $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$

e) $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+4)^2}{7}=1$ **f)** $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16}=1$

2) Hevkêşeya hîperbola ku her du nîskokên wê $F(3,0)$, $F'(-3,0)$ û girekî wê $(2,0)$ e, bibîne.

3) Hevkêşeya hîperbola ku di xala $N(2,3)$ re derbas dibe û her du xalên $(1,0),(-1,0)$ girên wê ne, bibîne.

4) Hevkêşeya hîperbola ku di xala $N(0,5)$ re derbas dibe û her du xalên $(2,\pm 3)$ girên wê ne, bibîne.

5) Hevkêşeya hîperbola ku her du xalên $(\pm 1,0)$ girên wê ne û her du nêzîkerên wê $y=\pm 3x$ in, bibîne.

6) Hevkêşeya hîperbola ku her du nîskokên wê $F(-3,1)$, $F'(-3,9)$ û girekî wê $(-3,3)$ ye, bibîne.

7) hevkêşeya hîperbola ku her du nîskokên wê $F\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $F'\left(0,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ û di xala $N(2,3)$ re derbas dibe, bibîne.

8) Hevkêşeya hîperbola ku navenda wê $O(0,0)$ be, $(3,0)$ girekî wê be û di xala $N(4,5)$ re derbas dibe, bibîne.

9) Hevkêşeya hîperbola ku navenda wê $O(6,-3)$ be, $(6,-1)$ girekî wê be û nîskokeke wê $(6,0)$ be, bibêne.

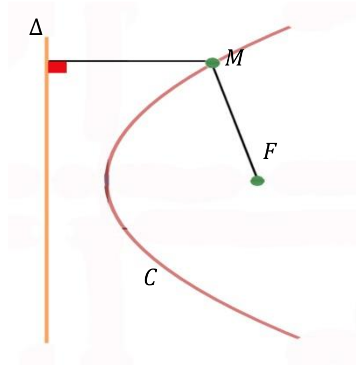
10) Hevkêşeya hîperbola ku navenda wê $(3,1)$ be, di her du xalên$(7,5)$ û $(0,3)$ re derbas dibe û tewareya wê ya nîskok bi tewareya OX re rastênhev e, bibîne.

11) Hîperbola ku her du hevkêşeyên nêzîkerên wê $2x-3=0$,$2\,x-1=0$ bin û nîskokeke wê $F(3,-1)$ be.

a) Hevkêşeya hîperbol, nîskoka wê ya din,her du girên wê û her du nêzîkerên wê bibîne û piştre xêz bike.

b) Tekez bike ku $N(-1,2)$ xaleke ji hîperbolê ye, pêveka d di xala N de bibîne û hevkêşeya pêveka d' ya ku bi pêveka d re rastênhev e bibîne.

PÊNASEYA HEVBEŞ A BIRÎNÊN KOVIKÊ



Eger F xaleke neguhêr ji xalên teqaleyê be, Δ rastekek di teqaleyê de be ku Δ di F re derbas nabe.

Birînên kovikê ew komika xalan $\boldsymbol{C}$ yên teqaleya ku her xalek ji wan, vê taybetmendyê pêk tîne: (rêjeya di navbera dûrahiya her xalê ji F û dûrahiya wê ji Δ yeksanî hejmara $\boldsymbol{e}$ ye û $\boldsymbol{e} \in]\mathbf{0}, +\infty[$ ye.)

Ji F re **nîskok** tê gotin û Δ **rastkerê** nîskoka F ye.

- Eger $e \in]0{,}1[$ be, Birîn **elîps** e.
- Eger $e \in]1, +\infty[$ be, Birîn **hîperbol** e.
- Eger $e = 1$ be, Birîn **parabol** e.
- Eger M xalek ji vê Birînê be, wê demê $\frac{\boldsymbol{MF}}{\boldsymbol{L(M,\Delta)}} = \boldsymbol{e}$ an jî $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$

  $L(M, \Delta)$ dîrahiya di navbera M û Δ ye.

Têbînî:

rêjeya di navbera dûrahiya di navbera her du nîskokan de $\mathbf{2}\boldsymbol{c}$ û dûrahiya di navbera her du giran de $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$ de yeksanî $\boldsymbol{e} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{c}}{\mathbf{2}\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ ye, ji $\boldsymbol{e}$ re **dûrbûna navendî** tê gotin.

Mînak:

birîna kovikê ya ku nîskoka wê $F(-1, 6)$ be û hevkêşeya rastkerê nîskoka $F, 5y = 14$ û $e = \frac{5}{3}$ bin. hevkêşeya wê, her du nêzîkerên wê bibîne û piştre xêz bike.

Çareserî:

$e = \frac{5}{3} > 1$, Birîn hîperbol e, li gorî pênaseya birîna kovikê

$M(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \frac{MF}{L(M,\Delta)} = e$ li gorî vê

$MF = e\, L(M, \Delta)$ yan jî $(MF)^2 = e^2(L(M, \Delta))^2$, wê demê

$$(x+1)^2-(y-6)^2=\left(\frac{25}{9}\right)\frac{(5y-14)^2}{25}$$

$$9(x+1)^2-9(y-6)^2=(5y-14)^2$$

$$9(x+1)^2+9y^2-108y+324=25y^2-140y+196$$

$9(x+1)^2-16(y^2+2y)=-128$ yan jî

$$9(x+1)^2-16(y-1)^2=-144$$

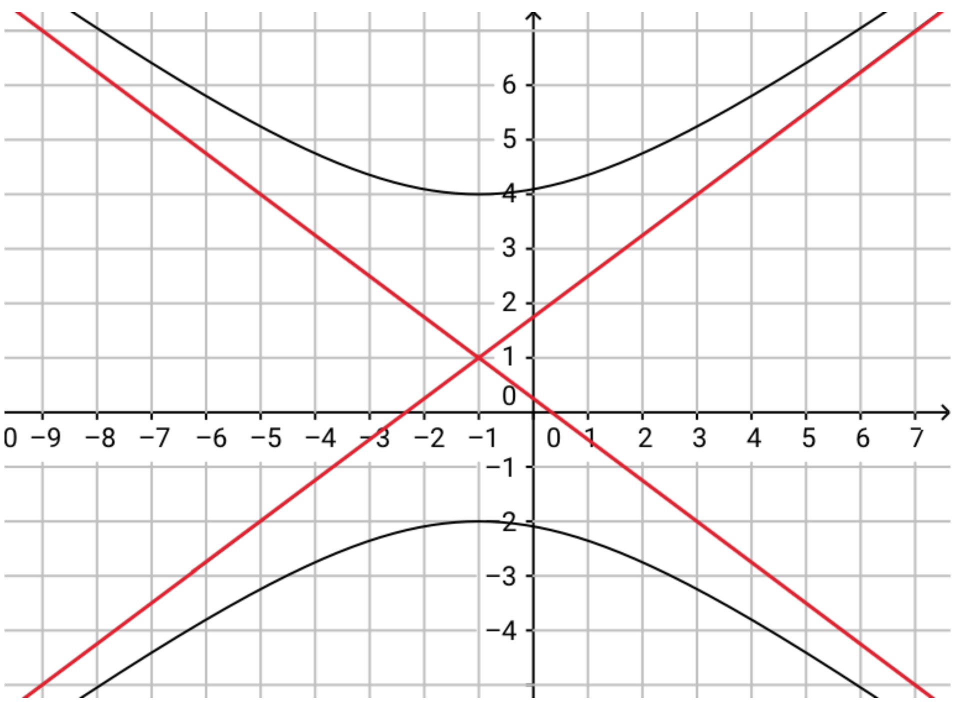
$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$$

Ji bendekeya dawî tê dîtin ku navenda hîperbolê $O'(-1,1)$ ye, tewareya wê ya nîskok bi tewareya OY re rastênhev e.

$b=\sqrt{9}=3$, $a=\sqrt{16}=4$,li gorî van; $c^2=a^2+b^2=25 \Longrightarrow c=5$

Hevkêşeyên her du nêzîkerên wê: $\frac{y-1}{3}=\pm\frac{x+1}{4}$ yan jî

$4y+3x-1=0$ û $4y-3x-7=0$



Hinkirin:

1) birîna kovikê ya ku $F'(-2,-1)$, $A(6,-1)$ û $e=\frac{5}{3}$ bin.
   a) Hevkêşeya wê, her du nêzîkerên wê bibîne û piştre xêz bike.
   b) Hevkêşeya pêveka wê di xala N de li gorî ku: $x_N = 8$ û $y_N > 0$ e, bibîne.
2) Hevkêşeya hîperbola ku her du nîskokên wê $F(4,0)$, $F'(-4,0)$ û $e=\frac{3}{5}$ bin, bibîne.
3) Hevkêşeya birîna kovikê ya ku nîskokeke wê (a,a) , hevkêşeya rastkerê vê nîskokê ev be $x+y=a$ û $e=\sqrt{2}$, bîbîne.
4) Eger Δ rasteka ku hevkêşeya wê $x=-1$ be, $F(0,0)$ xalek be. Komika xalên teqaleyê $M(x,y)$, yên ku rêjeya di navbera dûrahiya wê ji F û dûrahiya wê ji rasteka Δ yeksanî $\sqrt{2}$ ye, bibîne, piştre xêz bike.
5) Eger $a\,,c$ du hejmar bin ku $0<c<a$, d rasteka ku hevkêşeya wê $x=\frac{a^2}{c}$ be û $F(c,0)$ xalek be. Hevkêşeya elîpsa ku F nîskoka wê be, rasteka d rastkerê vê nîskokê be û $e=\frac{c}{a}$ be. Bi sûdgirtina ji taybetiyên hemalî yên elîpsê, hevkêşeya rastkerê nîskoka $F'(-c,0)$ bibîne.

PIRSÊN BEŞA NEHEM

1) Hevkêşeya parabol a ku tewareya wê û YY' rastênhev in û di xalên $A(2,3)$, $B(-2,-1)$ û $C(-4,0)$ re derbas dibe, bibîne.

2) Hevkêşeya parabol a ku nîskoka wê $F(-1,-1)$, tewareya wê û XX' rastênhev in û girê wê dikeve li ser rasteka ku Hevkêşeya wê $y-2x-3=0$ e, bibîne.

3) hevkêşeya elîpsa ku navenda wê $O'(2,1)$ e, dirêjahiya eşkêla biçûk 6 e, durahiya di navbera her du nîskokên wê de 8 e û tewareya nîskok bi OY re rastênhev e, bibîne.

4) Eger $5x^2+9y^2-30x+18y=\lambda$ hevkêşeyek be.

a) Li gorî nirxên $\lambda \in \mathbb{R}$, komika xalên ku hevkêşe nîşan dike bibîne.

b) Eger $\lambda=-9$ be, tekez bike ku xala $N(1,\frac{2}{3})$ xaleke ji xalên elîpsê ye û pêveka wê d di xala N de bibîne.

c) Hevkêşeya pêveka d' ya ku bi pêveka d re rastênhev e bibîne.

5) eger $a>0$ be û $F(a,a)$, $F'(-a,-a)$ du xal bin, komika xalên teqaleyê $M(x,y)$, yên ku wekheviya $|MF-MF'|=2a$ pêk tînin, bibîne (hîperbola du hemkenar).

6) Hevkêşeya hîperbola ku navenda wê $(2,4)$ be, $(6,4)$ girekî wê be, $y=2x$ hevkêşeya nêzîkerekî wê be, bibîne.

7) Hevkêşeya hîperbola ku her du hevkêşeyên nêzîkerên wê $4x+3y+1=0$, $4y-3x+7=0$ bin û nîskokeka wê $(1,-4)$ be, bibêne.

8) Eger Δ rasteka ku hevkêşeya wê $x=-1$ be, $F(0,0)$ xalek be. Komika xalên teqaleyê $M(x,y)$, yên ku rêjeya di navbera dûrahiya wê ji F û dûrahiya wê ji rasteka Δ yeksanî $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ye, bibîne, piştre xêz bike.

9) Eger a , c du hejmar bin ku $0<a<c$, d rasteka ku hevkêşeya wê $x=\frac{a^2}{c}$ be û $F(c,0)$ xalek be. hevkêşeya hîperbola ku F nîskoka wê be, rasteka d rastkerê vê nîskokê be û $e=\frac{c}{a}$ be. Bi sûdgirtina ji taybetiyên hemalî yên hîperbolê, hevkêşeya rastkerê nîskoka $F'(-c,0)$ bibîne.

PLANSAZIYA BELAVKIRINA WANEYAN

HEFTE / MEH	HEFTEYA YEKEM	HEFTEYA DUYEM	HEFTEYA SÊYEM	HEFTEYA ÇAREM
ÎLON			- Dawî - Rewşên nediyar	- Domdarî - Pirsên beşa yekem
COTMEH	- Daraştin - Fonksiyona daraştî ya du fonksiyonên hevgirtî	- Bikaranîna daraştinê di dîtina guherîna fonksiyona hejmarî de	- Nirxên xwecih yên mezin û biçûk	- Pêkanînên nirxên mezin û biçûk di jiyanê de - Pirsên beşa duyem
MIJDAR	- Fonksiyonên resen - Integral	- Integrala bi sînor - Pirsên beşa sêyem	- Dibetî - Dibetiya mercî	- Dibetiya serbixwe
KANÛN	- Fonksiyona nenasê dibetiyê	- Pirsên beşa şeşem	- Matrîs	- Çareserkirina hevkêşeyan
ÇILE	- Pirsên beşa heftem	EZMÛNA DEMA YEKEM	BÊHNVEDAN	BÊHNVEDAN
SIBAT	- Rastekên nêzîker	- Xêzkirina girafîkên hin fonksiyonan	- Pirsên beşa çarem - Peyhatî	- Tekezkirina gav bi gav - Dawiya peyhatiyê
ADAR	- Teoriyên dawiyan - Pirsên beşa pêncem	- Analîza pirpêkhate	- Girafîka hejmarên kompleks - Hejmarên kompleks awayê bihêz	- Pirsên beşa heştem
NÎSAN	- Parabol	- Elîps	- Hîperbol	- Pênaseya hevbeş a birînên kovikê
GULAN	- Pirsên beşa nehem	EZMÛNA DAWIYA SALÊ		