BÎRKARÎ

AMADEYÎ

2

NAVEROK

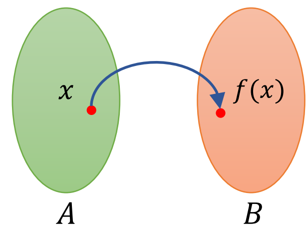
BEŞA YEKEM: KARANÎNÊN LI SER FONKSIYONAN

1) KOMIKA ENDAMAN
2) FONKSIYONA COT Û YA KIT
3) KARANÎNÊN LI SER FONKSIYONAN
4) HEVGIRTINA FONKSIYONAN
5) PIR PÊKHATE

Lenhard Euler 1707 – 1783

Zaniyarekî Swêsrî ye di bîrkarî de pir navdar e, gelek berhemên wî jî hene, nêzî 80 pirtûk çêkiriye. Di hemû beşên bîrkarî de xebitiye û gelek têgeh jî afirandine, wek têgeha fonksiyonê $f(x)$ yekem car wî bi kar aniye, bingeha logarêtm e, sembola komkirinê sîgma $\sum$ hejmara i di hejmarên komplêks de û bikaranîna π di naskirina têkiliya di navbera derdor û eşkêla bazin de bi kar aniye.

KOMIKA ENDAMAN



Eger $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{\phi}$ û $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{\phi}$, û $\boldsymbol{f}$ têkiliya ji $\boldsymbol{A}$ ber bi $\boldsymbol{B}$ ve diçe. Wê demê em ji $\boldsymbol{f}$ re dibêjin fonksiyon e, tenê eger her endamek ji destpêkê $\boldsymbol{A}$, girêdayî be bi bincihê re $\boldsymbol{B}$.

Sembola fonksiyonê bi vî awayî ye:
$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$ yan jî $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Eger $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ fonksiyonek be, em ji $\boldsymbol{D}$ re dibêjin komika endaman, wê demê her endamek beramberekî wî li gorî $\boldsymbol{f}$ heye û sembola wê jî dibe $\boldsymbol{D_f}$.

Komika nirxên fonksiyona $\boldsymbol{f}$ komika bincihê fonksiyonê ye, sembola wê jî $\boldsymbol{E_f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{D})$.

1) Komika endamên fonksiyona rastek:

Ev fonksiyon bi vî awayî tê nivîsandin
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Komika endamên wê $\mathbb{R}$ ye.

Mînak:

Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = x^2 + 7$
b) $f(x) = x - 1$

Çareserî:

Em dibînin ku her du fonksiyon rastekî ne, li gorî vê,
komika endamên wan $\mathbb{R}$ ye.

2) Komika endamên fonksiyona kertî:

Komika endamên vê fonksiyonê tê dayîn li gorî ku (paran$\neq 0$) .

Mînak:

Komika endamên fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x}{x-1}}$ bibîne.

Çareserî:

Mercê vê fonksiyonê $\textbf{paran} \neq \mathbf{0}$ ango
$\boldsymbol{x - 1 \neq 0 \ \Rightarrow x \neq 1}$
Li gorî vê: $\boldsymbol{D_f} =]-\infty, \mathbf{1}[\cup]\mathbf{1}, +\infty[$

3) **Komika endamên fonksiyona kokî:**

Ev fonksiyon bi vî awayî ye $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{g(x)}}$

Eger $\boldsymbol{n}$ hejmareke kit be, wê demê, Komika endamên vê fonksiyonê Komika endamên $\boldsymbol{g(x)}$ e.

Lê eger $\boldsymbol{n}$ hejmareke cot be, wê demê, Komika endamên vê fonksiyonê li gorî ku $\boldsymbol{g(x) \geq 0}$ e, tê dayîn.

Mînak:

Komika endamên fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 1}}$ bibîne.

Çareserî:

$\mathrm{x} - 1 \geq 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{x} \geq 1$

Li gorî vê: $\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{1}, +\infty[$

Hînkirin:

1) Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{5 - x}$ d) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+9}$ f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \frac{3x+6}{x(x+7)}$ h) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x+1}}$

FONKSIYONA COT Û YA KIT

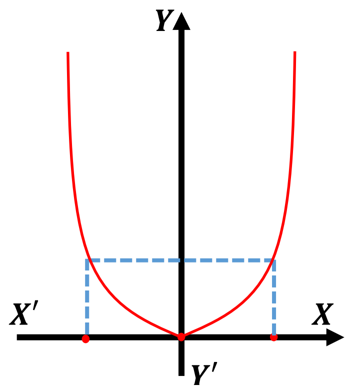
Fonksiyona cot:

Eger $f: D \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ fonksiyonek be, em dibêjin f cot e, tenê eger her du mercên li jêr pêk werin:

a) Eger $x \in D$ wê demê, $-x \in D$
b) Eger $x \in D$ wê demê, $f(-x) = f(x)$

Girafîka fonksiyona cot li gorî tewareya stûnî YY', hemalî ye.

Wekî din, eger girafîka fonksiyonekê li gorî tewareya stûnî hemalî be, wê demê ew fonksiyon cot e.



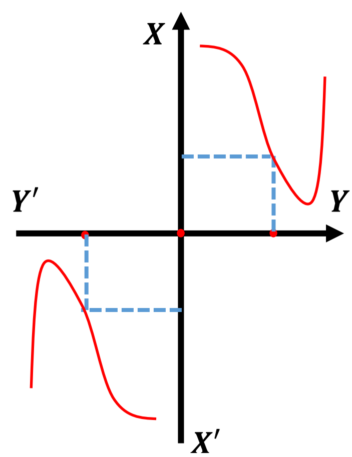
Fonksiyona kit:

Eger $f: D \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ fonksiyonek be, em dibêjin f kit e, tenê eger her du mercên li jêr pêk werin:

a) Eger $x \in D$ wê demê, $-x \in D$
b) Eger $x \in D$ wê demê, $f(-x) = -f(x)$

Girafîka fonksiyona kit li gorî navenda kordînatê, hemalî ye.

Wekî din, eger girafîka fonksiyonekê li gorî navenda kordînatê hemalî be, wê demê ew fonksiyon kit e.



Têbînî:

Eger merca yekem pêk neyê, wê demê fonksyon ne cot e, ne jî kit e.

Mînak 1:

Fonksiyonên cot û yên kit diyar bike.

a) $x \mapsto \cos x$
b) $x \mapsto \sin x$
c) $x \mapsto |x|$
d) $x \mapsto \sqrt{\ x}$

Çareserî:

a) Fonksiyona $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\cos x}$ cot e, ji ber ku $\boldsymbol{\cos(-x) = \cos x}$
b) Fonksiyona $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{\sin x}$ kit e, ji ber ku $\boldsymbol{\sin(-x) = -\sin x}$
c) Fonksiyona $\boldsymbol{x} \mapsto |\boldsymbol{x}|$ cot e, ji ber ku $|\boldsymbol{-x}| = |\boldsymbol{x}|$
d) Fonksiyona $\boldsymbol{x} \mapsto \sqrt{\ \boldsymbol{x}}$ ne cot e û ne jî kit e, ji ber ku $\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{0}, +\infty[$ û li gorî vê, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}, \boldsymbol{l}$ê $\boldsymbol{-x} \notin \boldsymbol{D}$

Mînak 2:

Ji yên jêr, fonksiyona cot û ya kit diyar bike.

a) $f(x) = x^2 + x$
b) $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

Çareserî:

a) Fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x}$ komika endamên wê $\mathbb{R}$ ye,
lê $\boldsymbol{f(1) = 2 \neq f(-1) = 0}$, li gorî vê fonksiyon ne cot e,
û $\boldsymbol{f(-1) \neq -f(1)}$ li gorî vê, fonksiyon ne kit e jî.

b) Fonksiyona $\boldsymbol{g(x) = x\sqrt{x^2 + 1}}$ komika endamên wê $\mathbb{R}$ ye,
$g(-x) = -x\sqrt{(-x)^2 + 1} = -x\sqrt{x^2 + 1} = -g(x)$ li gorî vê,
fonksiyona g kit e.

Hînkirin:

1) Fonksiyonên cot û tên kit diyar bike.

a) $f(x) = x^2 - x$

b) $f(x) = xsinx$

c) $f(x) = \frac{5}{x^2}$

d) $f(x) = |7x|$

e) $f(x) = tanx$

f) $f(x) = \sqrt{x^2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \sqrt{x}$

KARANÎNÊN LI SER FONKSIYONAN

Komkirin:

Sembola komkirina du fonksiyonan $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}$ e,
û bi vî awayî tê nivîsandin $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ yan jî $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h})(\boldsymbol{x})$
lê komika endamên wê, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_h}$

Mînak:

Encama komkirina her du fonksiyonên li jêr bibîne.

$v(x) = 5x + 1, \qquad w(x) = 3x - 2$

Çareserî:

$v(x) + w(x) = (5x + 1) + (3x - 2) = 8x - 1$

Derxistin:

Sembola derxistina du fonksiyonan $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}$
û bi vî awayî tê nivîsandin $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ yan jî $(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h})(\boldsymbol{x})$
lê komika endamên wê, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_h}$

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x + 3},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2}$, encama $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$ bibîne.

Çareserî:

$f(x) - g(x) = (2x + 3) - (x^2) = -x^2 + 2x + 3$

Hevdan:

Sembola hevdana du fonksiyonan $\boldsymbol{fh}$
û bi vî awayî tê nivîsandin $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ yan jî $(\boldsymbol{fh})(\boldsymbol{x})$
lê komika endamên wê, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_h}$

Mînak:

Encama hevdana her du fonksiyonên li jêr bibîne.

$h(x) = 2x + 3, \qquad l(x) = x^2$

Careserî:

$h(x)l(x) = (2x+3)(x^2) = 2x^3 + 3x^2$

Parvekirin:

Sembola parvekirina du fonksiyonan $\frac{f}{g}$
û bi vî awayî tê nivîsandin $\frac{f(x)}{g(x)}$
lê komika endamên wê, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_h}$ û $\boldsymbol{g(x) \neq 0}$ e.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f(x) = 2x+3}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2}$, encama parvekirina $\frac{f}{g}$ û komika endaman bibîne.

Careserî:

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{x^2}$

Komika endaman $\mathbb{R}/\{0\}$ e.

Hînkirin:

1) Eger $\boldsymbol{f(x) = x^2+2x-3}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2-1}$, encama karanînên li jêr bibîne.

a) $f(x) + g(x)$

b) $f(x) - g(x)$

c) $(fg)(x)$

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

HEVGIRTINA FONKSIYONAN

Hevgirtina du fonksiyonan, pêkanîna fonksiyonekê li gorî fonksiyoneke din.

Eger $\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)}$ du fonksiyon bin, û me encama $\boldsymbol{f(x)}$ li gorî $\boldsymbol{g(x)}$ nivîsand, wê demê em dikarin bi vî awayî binivîsin:

Sembola wê jî bi vî awayî ye: $(\mathbf{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$
wateya wê jî ev e: $\mathbf{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}, \ \boldsymbol{g(x) = x^2}$, encama $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x})$ bibîne.

Çareserî:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2$$

Lê gava em cihê her du fonksiyonan biguherin! encam heman e?

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = 2x^2 + 3$$

Wek tê dîtin, encam ne yek e, ango $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x})$

Hevgirtina fonksiyonekê bi xwe re:

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$ be, encama $(\boldsymbol{f \circ f})(\boldsymbol{x})$ bibîne.

Çareserî:

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f(2x + 3\ ) = 2(2x + 3) + 3 = 4x + 9$$

Navbera hevgirtina fonksiyonan:

Nivîsandina $(\mathbf{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ wateya wê heye,
tenê eger $\boldsymbol{x} \in \mathbf{D}_{\boldsymbol{f}}$ û $\boldsymbol{f(x)} \in \mathbf{D}_{\boldsymbol{g}}$, li gorî vê, navbera $\mathbf{g} \circ \boldsymbol{f}$ komika hejmarên rast $\mathbb{R}$ ye.

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\boldsymbol{x}}, \ \boldsymbol{g(x) = x^2}$, navbera $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x})$ bibîne.

Çareserî:

Navbera $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ hemû hejmarên rast ên tam pozîtîf in. ango $\boldsymbol{D_f} = [\mathbf{0}, +\infty[$
Navbera $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ hemû hejmarên rast in. Ango $\boldsymbol{D_g} = \mathbb{R}$

Li gorî vê, navbera $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x})$ hemû hejmarên rast ên tam pozîtîf in. ango $\boldsymbol{D_{g\circ f}} = [\mathbf{0}, +\infty[$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$, $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x}}$, navber û encama $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x})$ û $(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x})$, bibîne.

Çareserî:

- Dîtina $(\boldsymbol{g \circ f})(\boldsymbol{x})$:

  $f(x) = x^2 + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

  $x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$

  ji bo dîtina $\boldsymbol{g\big(f(x)\big)}$ divê $\boldsymbol{f(x) \neq 0}$ be, ev jî rast e, ji ber ku çareseriya $\boldsymbol{x^2 + 1 = 0}$ nîne, li gorî vê, $\boldsymbol{D_{g\circ f}} = \mathbb{R}$

  $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2+1}$

- Dîtina $(\boldsymbol{f \circ g})(\boldsymbol{x})$:

  $g(x) = \frac{1}{x} \qquad D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

  $f(x) = x^2 + 1 \qquad D_f = \mathbb{R}$

  $x \mapsto g(x) \mapsto f\big(g(x)\big)$

  $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2} + 1$

  li gorî vê, $\boldsymbol{D_{f\circ g}} = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$

Hînkirin:

1) Li gorî rewşên li jêr, navber û encamên $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}), (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ bibîne.

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x$

b) $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = 3x$

PIR PÊKHATE

Pir pêkhateya $\boldsymbol{P}$ ji hêza $\boldsymbol{n}$, fonksyoneke bi vî awayî tê nivîsandin:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Li gorî ku $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n-1}, \dots, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}$ hejmarine pozîtîf in.

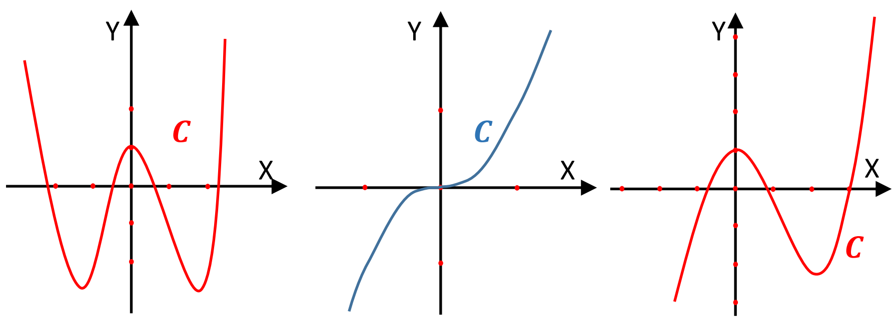
Û ji $\boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{a_{n-1}}, \dots, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_0}$ re qatjimarên hejmarî tê gotin.

$\boldsymbol{a_n} \neq \boldsymbol{0}$ û ji $\boldsymbol{a_0}$ re, pêkhatiya xwecih an jî pêkhateya teqez tê gotin.

Ji $\boldsymbol{a_n x^n}$ re, **pêkhateya bingehîn** tê gotin.

Girafîka pir pêkhateyê

Li ser girafîkên pir pêkhateyên li jêr bihizire.



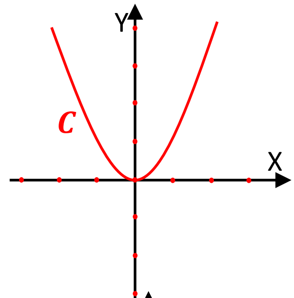
Reftara pir pêkhate

Reftara pir pêkhate li her du aliyên girafîka wê tê dîtin, ango gava ku nirxê $\boldsymbol{X}$ li ser tewareya $\boldsymbol{XX'}$gelekî mezin an jî gelekî biçûk bibe**,** em ê guhertina di nirxê $\boldsymbol{Y}$ de bibînin.

Reftara pir pêkhateya $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ li gorî nirxê $\boldsymbol{n}$ û hêmaya $\boldsymbol{a_n}$ ango li gorî reftara $\boldsymbol{a_n x^n}$ e, ji ber ku eger $\boldsymbol{x}$ ber bi $+\infty$ yan jî $-\infty$ biçe, wê demê, bandora nirxên pêkhateyên ji $\boldsymbol{n}$ biçûktir li ser reftara pir pêkhateyê di her du aliyan de nîne.

Mînak 1:

Reftara fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ ya ku girafîka wê li rexê ye, bi vî awayî ye:

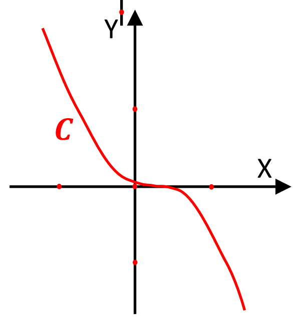


Dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow +\infty$

Û dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow +\infty$

Mînak 2:

Reftara fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = -x^3}$ ya ku girafîka wê li rexê ye, bi vî awayî ye:



Dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow +\infty$

Û dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow -\infty$

Mînak 3:

Reftara her du fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$
b) $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$

Çareserî:

a) $P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$
pêkhateya bingehîn $\boldsymbol{-2x^4}$ e û hêza wê $\boldsymbol{n = 4}$ e û qatjimara wê $\boldsymbol{a_n = -2}$ negetîf e:
Dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow -\infty$
Û dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow -\infty$

b) $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
pêkhateya bingehîn $\boldsymbol{3x^5}$ e û hêza wê $\boldsymbol{n = 5}$ e û qatjimara wê $\boldsymbol{a_n = 3}$ pozîtîf e:
Dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow -\infty$
Û dema ku $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty$ wê demê $\boldsymbol{y} \longrightarrow +\infty$

Parvekirina Euclidean ji pir pêkhateyê re

Parvekirina pir pêkhateyan weke parvekirina hejmaran e.

21 belavî 5 an, **encam 4** û ya **mayî** 1 e.

Em dizanin ku 21 = 4 (5) + 1

Eger $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ du hejmar bin li gorî ku $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, em dikarin parvekirineke yûkilîdiyan ji her du hejmaran re ku encam $\boldsymbol{q}$ û ya mayî $\boldsymbol{r}$ be, çêkin ku bi vî awayî were nivîsandin:

$$a = bq + r$$

Eger $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ du pir pêkhate bin ku $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ ne pir pêkhateyeke sifrî be, wê demê, du pir pêkhate hene $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ ku: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$

Li gorî ku: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ya parve dibe, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ ya parve dike, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ encam e û $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ ya mayî ye.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ du pir pêkhate bin, bi parvekirina $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ bi $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ re, encam $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ û ya mayî $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ bibîne.

Çareserî:

destpêkê em ya parve dibe û ya parve dike li ser xêzên parvekirinê binivîsin, û dest bi parvekirinê bikin,

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 5x + 7 & 3x \\ \cline{2-2} \underline{\pm 3x^2 \pm 3x} & x - 1 \\ 0 \ - 2x & \end{array}$$

a) wek li rexê tê dîtin em bibînin bê çi hevdanî $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ bibe, wê encam bibe $\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$? Wek tê dîtin ku bersiv $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ e, em $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$ hevdanî $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ bikin û encamê li bin $\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}\boldsymbol{x}$ binivîsin, û karanîna derxistinê pêk bînin,

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 5x + 7 & 3x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{\pm 3x^2 \pm 3x} & x - 1 \\ 0 \ - 2x \ + 7 & \\ \underline{\quad -2x \ + 2} & \end{array}$$

b) piştre em +7 bînin cem encama derxistinê ku dibe $-\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$,

c) niha em bibînin bê çi hevdanî $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ bibe, wê encam bibe $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$ xwiya ye ku -2 ye, em hevdanî $\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$ bikin û encamê li bin $-\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}$ binivîsin, derxistinê jî pêk bînin, $\mathbf{0} \ + \mathbf{5}$ ya mayî ye.

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - 5x + 7 & 3x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{\pm 3x^2 \pm 3x} & x - 1 \\ 0 \ - 2x \ + 7 & \\ \underline{\quad \pm 2x \ \pm 2} & \\ \quad\quad 0 \ + 5 & \end{array}$$

Ango encama parvekirinê

$Q(x) = 3x - 2$

û ya mayî jî

$R(x) = 5$

Tu dikarî bibînî ku: $\mathbf{3x^2 - 5x + 7 = (x - 1)(3x - 2) + 5}$

Teoriya ya mayî

Di parvekirina $\boldsymbol{P(x)}$ bi $\boldsymbol{x - a}$ re, ya mayî yeksanî $\boldsymbol{P(a)}$ ye.

Minak:

Eger $\boldsymbol{P(x) = x^2 - 3x + 6}$ pir pêkhateyk be, $\boldsymbol{P(1)}$ bibîne û parvikirna bi $\boldsymbol{x - 1}$ re çêke.

Çareserî:

Dîtina $\boldsymbol{P(1)}$

$P(1) = (1)^2 - 3(1) + 6 = 4$

Wek em dibînin, di parvekirina $\boldsymbol{P(x)}$ bi $\boldsymbol{x - 1}$ re, ya mayî $\boldsymbol{P(1)}$ e.

parvekirin

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - 3x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^2 - x & x - 1 \\ \cline{1-1}
0 - 2x + 6 & \\
\quad -2x + 2 & \\ \cline{1-1}
\quad\quad 0 + 4 &
\end{array}
$$

Teoriya faktor

Eger bi parvekirina $\boldsymbol{P(x)}$ bi $\boldsymbol{x - a}$ re, ya mayî 0 be, wê demê $\boldsymbol{x - a}$ çareseriya $\boldsymbol{P(x)}$ e, û $\boldsymbol{P(a) = 0}$ e.

Minak:

Eger $\boldsymbol{P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2}$ pir pêkhateyk be, bêyî karanîna parvekirinê, tekez bike ku $\boldsymbol{x - 2}$ çareseriya $\boldsymbol{P(x)}$ e.

Çareserî:

$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - (3\times2) + 2 = 8 - 4 - 6 + 2 = 0$

Li gorî vê, $\boldsymbol{x - 2}$ çareseriya $\boldsymbol{P(x)}$ e.

Eger $\boldsymbol{P}$ pir pêkhateyek be û $\boldsymbol{a}$ hejmareke rast be:

1) $\boldsymbol{x = a}$ çareseriya hevkêşeya $\boldsymbol{P(x) = 0}$.
2) $\boldsymbol{x - a}$ yek ji faktorên $\boldsymbol{P(x)}$ e.
3) $\boldsymbol{x = a}$ pêkhateya xaleke hevbeş e di navbera girafîka fonksyonê û tewareya $\boldsymbol{XX'}$ de.

Teorî

Eger $\boldsymbol{P(x)}$ pir pêkhateyek be ji hêza $\boldsymbol{n}$ û $\boldsymbol{a_n}$ pêkhateya bingehîn be, û hejmarên rast $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots\dots, a_n}$ sifir bin ji $\boldsymbol{P(x)}$ re, wê demê:

$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots\dots (x - x_n)$

Minak:

Pir pêkhateya ku hejmarên -2, 3, -4 jê re dibin sifir, bibîne û eger $\boldsymbol{a = 2}$ be, bi awayê asayî binivîse.

Çareserî:

$P(x) = a(x + 2)(x - 3)(x + 4) \qquad a \neq 0$

Ji bo $a = 2$:

$P(x) = 2(x + 2)(x - 3)(x + 4)$

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 20x - 48$

Çareseriya hevkêşeya pir pêkhateyê di $\mathbb{R}$ de

Eger $\boldsymbol{P(x)}$ pir pêkhate be, wê demê em ji $\boldsymbol{P(x)=0}$ re dibêjin hevkêşeya pir pêkhateyê ye.

> Ji bo dîtina çareseriya hevkêşeya pir pêkhateyê, em hejmarên 0, 1, 2, 3, … û -1, -2, -3, …diceribînin

Minak:

Pir pêkhateya $\boldsymbol{P(x)=4x^3-4x^2-x+1}$ çareser bike.

Çareserî:

Em destpêkê $\boldsymbol{P(1)}$ bibînin

$P(1)=4(1)^3-4(1)^2-(1)+1=0$

Em dibînin ku $\boldsymbol{P(1)=0}$ li gorî vê, 1 çareseriya hevkêşeyê ye.

Niha em dikarin bi awayê $P(x)=(x-1)Q(x)$ binivîsin.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-4x^2-x+1 & 4x^2-1 \\
\hline
4x^3-4x^2 & x-1 \\
0-0\quad -x+1 & \\
\hline
\quad\quad -x+1 &
\end{array}
$$

Piştî parvekirinê hevkêşe bi vî awayî tê nivîsandin

$P(x)=0 \Longrightarrow (x-1)(4x^2-1)=0$

$(x-1)(2x-1)(2x+1)=0$

Li gorî vê, komika çareseriyên $P(x)=0 : S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$

Têbînî:

Em dikarin hevkêşeyê bi awayê dahûrandinê jî çareser bikin:

$4x^3-4x^2-x+1=0$

$4x^2(x-1)-(x-1)=0$

$(x-1)(4x^2-1)=0$

$(x-1)(2x-1)(2x+1)=0$

Li gorî vê, komika çareseriyên $P(x)=0 : S=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right\}$

Hînkirin:

1) Reftara her fonksiyonekê ji yên li jêr bibîne.

a) $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$
b) $P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x + 1$
c) $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x$
d) $P(x) = -x^5 + 2x^4 + x + 1$

2) Eger $A(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 8$, $B(x) = x + 2$ du pir pêkhate bin, bi parvekirina $\boldsymbol{A(x)}$ bi $\boldsymbol{B(x)}$ re, encam $\boldsymbol{Q(x)}$ û ya mayî $\boldsymbol{R(x)}$ bibîne.

3) Parvekirina $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ bi her duyên li jêr re, bêyî karanîna parvekirinê, bibîne.
a) $B(x) = x + 2$
b) $B(x) = x - 1$

4) Eger $\boldsymbol{P(x) = 2x^3 + 7x^2 - \lambda}$ be, nirxê $\boldsymbol{\lambda}$ bibîne ku $\boldsymbol{x + 3}$ jê re bibe çareserî.

5) Eger $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ pir pêkhate be, $\boldsymbol{P(1)}$ û çareseriyên $\boldsymbol{P(x) = 0}$ bi pêkanîna tewriya faktor, bibîne.

6) Pir pêkhateyên li jêr dahûrîne:
a) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + 3$
b) $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$

7) Hevkêşeya li jêr çareser bike.
$2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 0$

PIRSÊN BEŞA YEKEM

1) Li gorî rewşên li jêr, navber û encamên $(g \circ f)(x), (f \circ g)(x)$ bibîne.

a) $f(x) = 2x, \quad g(x) = 2x$

b) $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(x) = 3x$

2) $\boldsymbol{f \circ g}$ bibîne.

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = \frac{5}{x}$, $g(x) = \sqrt{6 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{x + 5}$, $g(x) = x^2 + 4x - 1$

3) Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

c) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$

d) $f(x) = \frac{6x-9}{x^2-36}$

e) $f(x) = \frac{4x-3}{x^2+16}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

g) $f(x) = \frac{3x+6}{x^2+9x}$

h) $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{3x-2}}$

i) $f(x) = \frac{8x+12}{x^2+5x+4}$

j) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-40}$

k) $f(x) = \frac{2x}{x} + \frac{4}{x+1}$

l) $f(x) = \frac{6}{x+3} + \frac{2}{x-4}$

4) Fonksiyonên li jêr, cot in an kit in, diyar bike.

a) $f(x) = x^3 - 2x$
b) $f(x) = x^4 + 2$
c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - x$
d) $f(x) = x^2 + x$
e) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

5) Ji bo her nirxên $\boldsymbol{f(x)}$ û $\boldsymbol{g(x)}$, encama karanînên $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$, $(f - g)(x)$, $(f.g)(x)$ û $\frac{f(x)}{g(x)}$ bibîne piştre ji bo her fonksiyoneke nû, komika endamê wê binivîse.

a) $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = 8 + x^2$
$g(x) = x - 3$

c) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
$g(x) = x + 2$

d) $f(x) = x - 9$
$g(x) = x + 5$

e) $f(x) = x^2 + x$
$g(x) = 9x$

f) $f(x) = x - 7$
$g(x) = x + 7$

g) $f(x) = \frac{6}{x}$
$g(x) = x^3 + x$

h) $f(x) = \frac{x}{4}$
$g(x) = \frac{6}{x}$

i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = 4\sqrt{x}$

j) $f(x) = \frac{3}{x}$
$g(x) = x^4$

k) $f(x) = \sqrt{x + 8}$
$g(x) = \sqrt{x + 5} - 3$

l) $f(x) = \sqrt{x + 6}$
$g(x) = \sqrt{x + 4}$

6) Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$

b) $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0$

c) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

d) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

7) Eger $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ pir pêkhate be, $\boldsymbol{P(1)}$ û çareseriyên $\boldsymbol{P(x) = 0}$ bi pêkanîna tewriya faktor, bibîne.

BEŞA DUYEM: FONKSIYONA BI HÊZ Û YA LOGARÊTIM

1) Fonksiyona bi hêz
2) Fonksiyona logarêtim

Ji ber ku min zehmetiyên xelkê di karanînên bîrkarî de wek parvekirin, hevdan, kokdam û kokkabê dîtin, min dest bi lêgerînekê kir ta ji wan re van karanînan hêsan bikim.

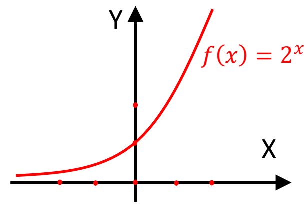
Napier

John Napier: Li bajarê Ednbere ya girêdayî Skotlandayê di sala 1550 de ji dayik bûye, gelek formên bîrkarî afirandine ya herî navdar tabloya logarêtmê.

FONKSIYONA BI HÊZ

Fonksiyona bi hêz, fonksiyoneke hejmarî ye $\boldsymbol{f}$, komika endamên wê $\mathbb{R}$ ye û navbera wê jî $]\mathbf{0}, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$ û bi vî awayî tê nivîsandin.

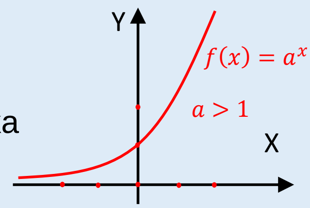
$f(x) = a^x : a \in \mathbb{R}^{+*}/\{1\}$



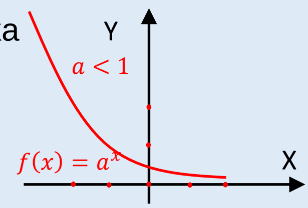
Mînak:

Fonksiyona $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}^{\boldsymbol{x}}$ fonksiyoneke bi hêz e.

Taybetiyên fonksyona bi hêz:



1) Eger $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, ji $\boldsymbol{f}$ re, fonksiyona bi hêz a zêdeker tê gotin û girafîka wê ber bi $\boldsymbol{XX'}$ ve li $-\infty$ diçe.
2) Eger $\boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, ji $\boldsymbol{f}$ re, fonksiyona bi hêz a kêmker tê gotin û girafîka wê ber bi $\boldsymbol{XX'}$ ve li $+\infty$ diçe.



3) Eger $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x}$ hejmarine rast bin:
   a) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 . x_2}$
   b) $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$
   c) $a^{x_1} \times a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
   d) $a^0 = 1$
   e) $a^x > 0$
4) Eger $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$: $\boldsymbol{a^x} > \mathbf{1}$ dema ku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{+*}$
   û $\boldsymbol{a^x} < \mathbf{1}$ dema ku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{-*}$
5) Eger $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$: $\boldsymbol{a^x} < \mathbf{1}$ dema ku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{+*}$
   û $\boldsymbol{a^x} > \mathbf{1}$ dema ku $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{-*}$
6) Eger $\boldsymbol{a^{x_1}} = \boldsymbol{a^{x_2}}$ wê demê $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$
7) Her du girafîkên $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a^x}$ û $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) = (\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}})^{\boldsymbol{x}}$ li gorî tewareya $\boldsymbol{YY'}$ hemalî ne.

Fonksiyona bi hêz a bi bingeha Napier

Ew fonksiyona ku bingeha wê hejmara nêpîr $e \simeq 2.71828$ û bi vî awayî tê nivîsandin:

$$f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[: f(x) = e^x$$

wek tê dîtin ev fonksiyon tam zêdeker e.

Çareseriya hevkêşeyên bi hêz

Mînak 1:

Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $3^{2x-6} = 1$
b) $7^{2x} - 7^x = 0$
c) $(16)^x - 12(4)^x - 64 = 0$

Çareserî:

a) $3^{2x-6} = 1$
$3^{2x-6} = 3^0$
$2x - 6 = 0 \ \to x = 3$
komika çareseriyan $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}\}$

b) $7^{2x} - 7^x = 0$
$7^{2x} = 7^x$
$2x = x$
$x = 0$
komika çareseriyan $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{0}\}$

c) $(16)^x - 12(4)^x - 64 = 0$
em destpêkê $(16)^x$ bi vî awayî binivîsin $(16)^x = (4)^{2x}$ û em $\boldsymbol{y}$ li şûna $(\mathbf{4})^{\boldsymbol{x}}$ binivîsin, ango $\boldsymbol{y} = (\mathbf{4})^{\boldsymbol{x}}$, niha hevkêşe bû bi vî awayî:
$y^2 - 12y - 64 = 0,$
$(y - 16)(y + 4) = 0$ (piştî dahûrandinê)
yan $y = -4$ nayê pejirandin
$y = 16$ lê $y = (4)^x$
$(4)^x = 16 \ \to x = 2$

komika çareseriyan $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}\}$

Mînak 2:

Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $\frac{e^{2x}}{e^2} = e^x$

b) $(e^x)^5 = e^x.e^{12}$

Çareserî:

a) $\frac{e^{2x}}{e^2} = e^x \Longrightarrow e^{2x-2} = e^x$

$2x - 2 = x$

$x = 2$

komika çareseriyan $S = \{2\}$

b) $(e^x)^5 = e^x.e^{12}$

$e^{5x} = e^{x+12}$ li gorî vê

$5x = x + 12$

$x = 3$

komika çareseriyan $S = \{3\}$

Komika endamên fonksiyona bi hêz

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be li gorî ku $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$

Wê demê, komika endamên $\boldsymbol{f}$, komika endamê $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ bi xwe ye.

Mînak:

Komika endamên fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$

Çareserî:

Ev fonksiyon li gorî komika endamên $\sqrt{x-1}$ tê dîtin, ango mercê wê, $x - 1 \geq 0 \longrightarrow x \geq 1$

Komika endaman $D = [1, +\infty[$

Hînkirin:

1) Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = e^{2x+1}$

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$

2) Hevkêşeya li jêr çareser bike.
$e^{2x} + 3e^{x} - 10 = 0$

FONKSIYONA LOGARÊTIM

Eger $\mathbf{2^y = 16}$ hevkêşeyek be, ji bo çareserkirina wê, em aliyê rastê bi awayê bi hêz binivîsin ku bingeha wê bibe 2

$2^y = 2^4$ wê demê $y = 4$

Mînak:

$5^y = 125 \Rightarrow \; 5^y = 5^3$ wê demê $y = 3$

Lê eger em nikaribin hejmarekê bi awayê hêz binivîsin, wek $3^y = 2$ wê demê pêdiviya me bi fonksiyoneke nû heye ji bo dîtina nirxê y.

Fonksiyona logarêtim:

Eger $\boldsymbol{b}$ hejmareke rast tam pozîtîf û $\boldsymbol{b \neq 1}$ be, $\boldsymbol{x}$ jî tam pozîtîf be, fonksiyona ku bingeha wê $\boldsymbol{b}$ û bi vî awayî tê nivîsandin: $\boldsymbol{y = \log_b x}$ li gorî ku $\boldsymbol{x = b^y}$,
jê re **fonksiyona logarêtim** tê gotin.
xwendina wê jî bi vî awayî ye:
$\boldsymbol{y}$ yeksanî logarêtima $\boldsymbol{x}$ li gorî bingeha $\boldsymbol{b}$.

Komika endamên wê $]0, +\infty[$

Mînak:

$2^0 = 1 \;\Leftrightarrow\; \log_2 1 = 0$

$2^1 = 2 \;\Leftrightarrow\; \log_2 2 = 1$

$2^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; \log_2 4 = 2$

$2^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; \log_2 8 = 3$

$2^4 = 16 \;\Leftrightarrow\; \log_2 16 = 4$

Têkiliya di navbera logarêtim û hêzê de

$$b^{x} = a \qquad \log_b a = x$$

$$b > 0, b \neq 1$$

Taybetiyên logarêtimê:

($\log_b b^x = x$ û $b^{\log_b x} = x$) Ango fonksiyona logarêtim vajiyê fonksiyona bi hêz $f(x) = b^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

Sembola wê $\log_b$, $\ D_f = (0, +\infty)$, $\ \mathbb{R}_f = \mathbb{R}$ û bi vî awayî tê nivîsandin: $\log_b:]0, +\infty[\to \mathbb{R}: x \to \log_b x$

Taybetiyên logarêtimê

Bi awayê cebrî	Mînak
$\log_c(a \times \mathrm{b}) = \log_c(a) + \log_c(b)$	$\log_2 32 = \log_2(4 \times 8)$ $= \log_2(4) + \log_2(8)$
$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$	$\log_7\left(\frac{16}{3}\right) = \log_7(16) - \log_7(3)$
$\log_c\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_c(b)$	$\log_7\left(\frac{1}{3}\right) = -\log_7(3)$
$\log_c(a^r) = r.\log_c(a)$	$\log_{10}(7^3) = 3.\log_{10}(7)$
$\log_a 1 = 0$ ji ber ku ($a^0 = 1$)	$\log_{10} 1 = 0$
$\log_a a = 1$ ji ber ku ($a^1 = a$)	$\log_{10} 10 = 1$
$\log_a \frac{1}{a} = -1$ ji ber ku $a^{-1} = \frac{1}{a}$	$\log_7 \frac{1}{7} = -1$

Logarêtima dehî bingeha wê 10 e, û sembola wê $\mathbf{log}$ e, (bingeh nayê nivîsandin).

Komika endamên fonksiyona logarêtim

Komika endamên fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = \log(g(x))}$ ev e:

$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Mînak:

Komika endamên fonksiyona li jêr bibîne.

$f(x) = \log_6(x^2 - 5x + 6)$

Çareserî:

Eger $x^2 - 5x + 6 > 0$ be, li gorî vê:

Komika endaman $D =]-\infty, +2[\cup]+3, +\infty[$

Girafîka fonksiyona logarêtim

Girafîka fonksiyon $\boldsymbol{f(x) = \log_a(x)}$ a hemaliya girafîka $\boldsymbol{g(x) = a^x}$ li gorî nîvê yekem: $\boldsymbol{\Delta_1}$: $\boldsymbol{y = x}$

Mînak:

Girafîka hevkêşeya li jêr xêz bike.

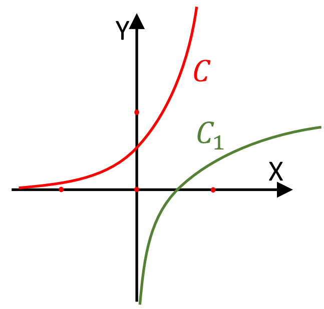
$f(x) = \log_2(x)$

Çareserî:

Ji bo xêzkirina $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{g(x) = 2^x}$ em tabloya li jêr dagirin:

x	-2	-1	0	+1	+2
$g(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	+1	+2	+4

Niha em dikarin $\boldsymbol{C}$ xêz bikin



Piştre Ji bo xêzkirina $\boldsymbol{C_1}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f(x) = \log_2(x)}$ em tabloya li jêr dagirin:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	+1	+2	+4
$f(x) = \log_2(x)$	-2	-1	0	+1	+2

Logarêtima Napier

Logarêtma nêpîr ku bingeha wê $\boldsymbol{e \simeq 2.71828}$ sembola wê $\mathbf{ln}$ e, lê em bingeha wê ango $\boldsymbol{e}$ nanivîsin:

$\ln:]0, +\infty[\to \mathbb{R}: x \to \ln(x)$

$$x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y$$

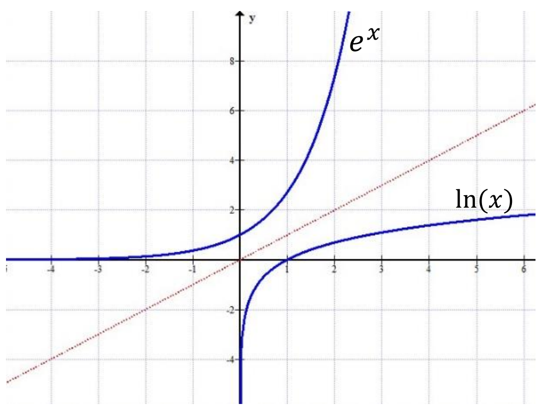
$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5	6	7
$\ln(x)$	0	0.69	1.10	1.37	1.61	1.79	1.95

Girafîka fonksiyona logarêtima Napier

fonksiyona logarêtima nêpîr vajiyê fonksiyona bi hêz a nêpîr e, di $\mathbb{R}$ li gorî ku:

$f(x) = e^x$

Ji ber vê, girafîka $\ln(x)$ hemaliyê girafîka e^x e, li gorî rasteka niveka yekem.



Taybetiyên fonksiyonên logarêtima Napier

$e = 2.7182$,	$\ln(1) = 0$,	$\ln(e) = 1$
$\ln(x) = a$	$\Leftrightarrow$	$x = e^a$
$\ln e^x = x$,	$x \in \mathbb{R}$	
$\ln(x) < 0$	$\Leftrightarrow$	$0 < x < 1$
$\ln(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$x = 1$
$\ln(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	$x > 1$
$\ln(x) < 1$	$\Leftrightarrow$	$0 < x < e$
$\ln(x) = 1$	$\Leftrightarrow$	$x = e$
$\ln(x) > 1$	$\Leftrightarrow$	$x > e$

$$\boxed{\ln(x_1) = \ln(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2}$$

Çareseriya fonksiyonên logarêtim

Fonksiyonên logarêtim li gorî taybetiyên wê, tên çareserkirin.

Mînak 1:

Hevkêşeya li jêr di $\mathbb{R}$ de çareser bike.

$\ln(x^2) = \ln(3x + 4)$

Çareserî:

Destpêkê em komika endaman $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D_1} \cap \boldsymbol{D_2}$ bibînin:

$\boldsymbol{D_1}$ komika endamên $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}})$ e, $\boldsymbol{D_1} =]\mathbf{0}, +\infty[$

$\boldsymbol{D_2}$ komika endamên $\mathbf{ln}(\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4})$ e, $\boldsymbol{D_2} =]\frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}}, \mathbf{0}[$

$D =]\frac{-4}{3}, 0[\cup]0, +\infty[$

Em hevkêşeya $x^2 = 3x + 4$ çareser bikin:

$x^2 = 3x + 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

Yan $x = -1$ nayê pejirandin, yan jî $x = 4$

Komika çareseriyan $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{4}\}$

Mînak 2:

Hevkêşeya li jêr di $\mathbb{R}$ de çareser bike.

$\ln(x - 2) = 1$

Çareserî:

Mercê wê: $x - 2 > 0$

$\ln(x - 2) = 1$

$\ln(x - 2) = \ln e$

$x - 2 = e$

$x = e + 2$

Hînkirin:

1) Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(\mathrm{x}) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$
b) $f(\mathrm{x}) = \ln(\sqrt{x^2+1})$
c) $f(\mathrm{x}) = \ln(x^2 + x + 1)$
d) $f(\mathrm{x}) = \ln(\frac{x+1}{x-1})^2$

2) Hevkêşeyên li jêr çareser bike

a) $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 12$
b) $\log_{10}(2x+3) = 1$
c) $\ln(2x) = -\ln(x^2-1)$
d) $\ln(x^2+3x) = \ln(2x+2)$
e) $\ln(\frac{x}{2x+1}) = -1$

PIRSÊN BEŞA DUYEM

1) Yên li jêr sade bike.

a) $\log_2(x+1) - \log_2(x^2+2x+1)$

b) $\ln(x+3) - 2\ln(1-x) + 4\ln x$

c) $\log_5 e^{x+1} - \log_3 e^{2-x}$

d) $\log_9(x^2+1) - \log_3(x+1)$

e) $5\ln(x) + 7\ln(y) - 5\ln(z)$

2) Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$

b) $e^{x+3} = 5$

c) $3^{x+3} = 27$

e) $x^{-5} = 2x^3$

3) Hevkêşeyên li jêr çareser bike.

a) $\log_2(x) - \log_2(2-x) = 0$

b) $-\log_3(x+5) + \log_3(-x+1) = \log_3(2)$

c) $\ln(x-6) = \ln(-2x+3)$

e) $\log_2(x+3) + \log_3(x-2) = 0$

f) $\log_{10}(2x+3) = 1$

g) $-\ln(x+3) + \ln(2-x) = \ln 4$

4) Komika endamên fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $\ln(x-3)$ **b)** $\ln(1-x)$

c) $\ln(x^2-3x+2)$ **c)** $\ln(\frac{x-7}{3-x})$

e) $\frac{1}{\ln(x)}$ **f)** $\frac{\ln(5-x)}{x}$

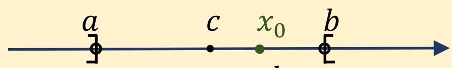
BEŞA SÊYEM: DAWÎ Û BERDEWAMÎ

1) DAWIYÊN FONKSIYONÊ
2) BERDEWAMIYA FONKSIYONÊ

DAWIYÊN FONKSIYONÊ

Berî ku em derbasî dawiyan bibin, divê em **cîrana hejmar** nas bikin.

Eger $\boldsymbol{x_0}$ hejmareke rast be,
navbera vekirî $\boldsymbol{\Omega} =]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ ya ku $\boldsymbol{x_0}$ endameke jê be, jê re **cîrana hejmara** $\boldsymbol{x_0}$ tê gotin.



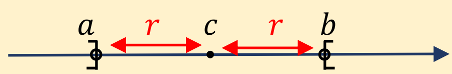
Navenda cîran $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}}$

Nîveşkêla cîran $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2}}$

Cîrana hejmara $\boldsymbol{x_0}$ ya ku navenda wê $\boldsymbol{c}$ û nîveşkêla wê $\boldsymbol{r}$ sembola wê $\boldsymbol{N_{(c,r)}(x_0)}$ û bi vî awayî tê nivîsandin:

$N_{(c,r)}(x_0) =]c - r, c + r[$

Eger $\boldsymbol{c}$ cîranek be ku navenda wê $\boldsymbol{c}$ bi xwe be û $\boldsymbol{r}$ nîveşkêla wê be, wê demê navê wê dibe cîrana asayî û sembola wê jî $\boldsymbol{N_r(c)}$



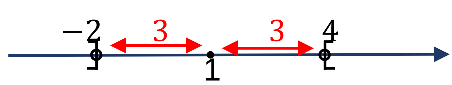
Mînak 1:

Cîrana hejmara (-1) ya ku navenda wê (1) û nîveşkêla wê (3) binivîse:

Çareserî:

$N_{(c,r)}(x_0) =]c - r, c + r[$

$N_{(1,3)}(-1) =]1 - 3, 1 + 3[=] - 2, 4[$



Mînak 2:

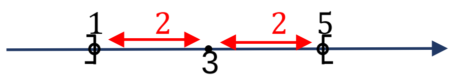
Cîrana hejmara (4), navend û nîveşkêla wê binivîse:

Çareserî:

Cîrana wê $]1, 5[$ e.

Navenda wê $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$

Nîveşkêla wê $r = \frac{b-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$



$N_{(3,2)}(x_0) =]3-2, 3+2[$

Teorî:

Em dizanin ku: $x \epsilon]c-r, c+r[\quad \Leftrightarrow \quad c-r < x < c+r$

Li gorî vê: $-r < x - c < +r \quad \Leftrightarrow \quad |x-c| < r$

Ango: $\boldsymbol{x \; \epsilon \;]c-r, c+r[} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{|x-c| < r}$

Têgeha **dawî**, yek ji têgehên bingehîn e di analîza bîrkarî de, ew jî girêdayî ye bi reftara fonksiyonekê ve dema ku nenasê wê nêzîkî hejmarekê bibe yan jî nêzîkî bêdawî bibe.

Dîtina dawiya fonksiyonekê

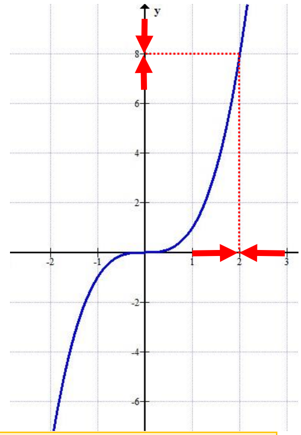
Ji bo dîtina dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dema ku $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ di fonksiyonê de bi cih bikin.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ fonksiyonek be, di dema ku $\boldsymbol{x} \to \mathbf{2}$, dawiya fonksiyonê bibîne.

Çareserî:

x	…	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	…
$f(x)$	...	4.91	5.83	6.85	8	9.26	10.64	…



$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

Wateya wê ew e ku dema $\boldsymbol{x}$ ber bi 2 ve diçe, wê demê $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ber bi 8 ve diçe.

Eger $\boldsymbol{A}$ binkomika $\mathbb{R}$ be û $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be, em dibêjin $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ ber bi $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ ve bi dawî dibe dema ku $\boldsymbol{x}$ ber bi $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{A}$ ve biçe, sembola wê jî bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to \boldsymbol{x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

yan jî $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b}$ dema ku $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$

Eger $\boldsymbol{\varepsilon}$ hejmareke rast tam pozîtîf be, em dikarin hejmareke din tam pozîtîf bibînin ku $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon})$ û li gorî vê:

$$|x - x_0|\varepsilon < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \qquad (x \in A)$$

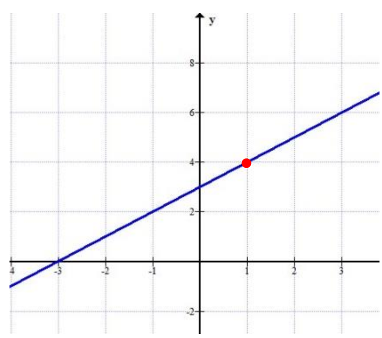
Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \mathbf{3}$ fonksiyonek be, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to \mathbf{1}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ bibîne.

Çareserî:

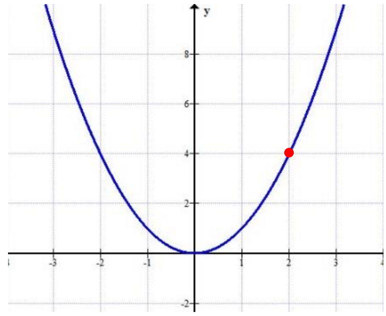
Tê dîtin ku dema $\boldsymbol{x} \to \mathbf{1}$ tê wateya ku $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, li gorî vê:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + 3) = (1 + 3) = 4$$



Mînak 2:

Eger $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ fonksiyonek be, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ bibîne



Çareserî:

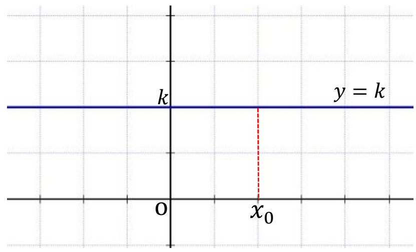
Tê dîtin ku dema $\boldsymbol{x} \to \mathbf{2}$ tê wateya ku $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{2}$, li gorî vê:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Teorî 1: Eger $f(x) = K$ li gorî vê:

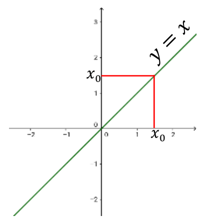
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (k) = k$$

$k \in \mathbb{R}$.



Teorî 2:

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$



Taybetiyên dawiyan

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a + b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a - b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x). \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a.b$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} [k.g(x)] = k. \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = k.b$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{a}{b} \qquad (g(x) \neq 0\,, b \neq o)$

6) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n = a^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

7) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt{a} \quad (a \neq 0\,, f(x) \neq 0)$

Eger $\boldsymbol{f}$ pir pêkhateyek be di $\mathbb{R}$ de, li gorî ku:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ wê demê:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0$$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de, li gorî ku: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ bibîne.

Çareserî:

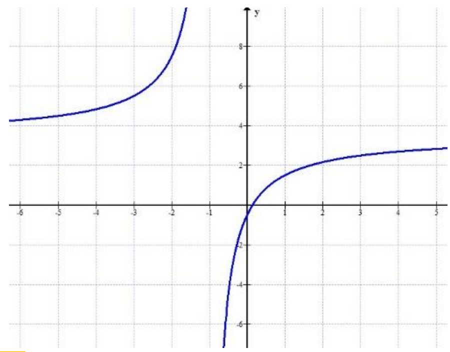
$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 2x - 3) = 4 - 4 - 3 = -3$$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R} - 1$ de, li gorî ku: $f(x) = \frac{7x-1}{2x+2}$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ bibîne.

Çareserî:



$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}\left(\frac{7x-1}{2x+2}\right)$$

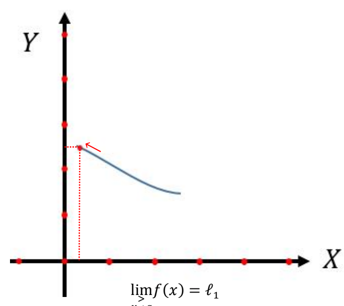
$$= \frac{\lim\limits_{x \to 3}(7x - 1)}{\lim\limits_{x \to 3}(2x + 2)} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Dawiyên çep û rastê

Dawiya rastê ji $\boldsymbol{f(x)}$ re, dema ku $\boldsymbol{x}$ nêzîkî $\boldsymbol{a}$ dibe ji aliyê rastê ve (ango bi nirxên mezintir), sembola wê $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a^+} f(x)}$, yan jî bi vî awayî ye

$$\boldsymbol{\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1}$$

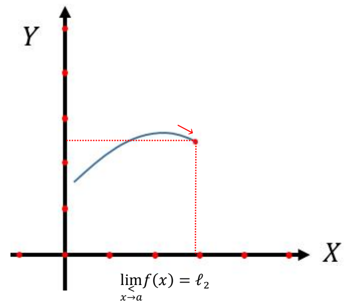
Em ji $\boldsymbol{\ell_1}$ re dibêjin: dawiya $\boldsymbol{f}$ ji aliyê rastê ve.



Dawiya çepê ji $f(x)$ re, dema ku x nêzîkî a dibe ji aliyê çepê ve (ango bi nirxên biçûktir), sembola wê $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, yan jî bi vî awayî ye

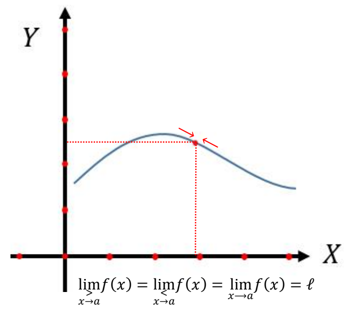
$$\lim_{\substack{< \\ x\to a}} f(x) = \ell_2$$

Em ji ℓ_2 re dibêjin: dawiya f ji aliyê çepê ve.



Eger $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to a}} f(x)$ wê demê dawiya f li cem x_0 heye, ango:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to a}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to a}} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$



Lê eger $\ell_1 \neq \ell_2$ wê demê dawiya f li cem x_0 nîne.

Mînak:

Eger f fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de, li gorî ku: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 2 \\ x^2 & x \leq 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)$ û $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$ bibîne.

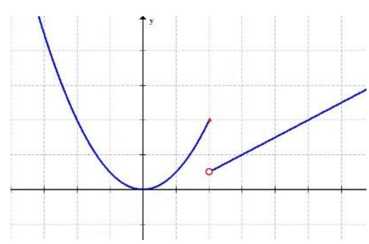
b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ heye yan na?

Çareserî:

a) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} (x-1) = 1$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x^2) = 4$

b) Em dibînin ku $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$ li gorî vê, dawiya f li cem 2 nîne.



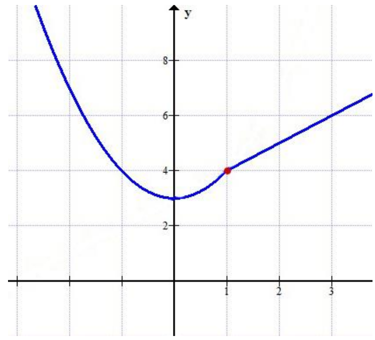
Mînak:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de, li gorî ku: $f(x) = \begin{cases} x+3 & x>1 \\ x^2+3 & x \leq 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ û $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ bibîne.

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ heye yan na?

Çareserî:



a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x+3) = 4$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x^2+3) = 4$

b) Em dibînin ku $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ li gorî vê, dawiya $\boldsymbol{f}$ li cem 1 heye.

Hin cureyên dawiyan:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be li nêzî $+\infty$ û $\boldsymbol{f}$ ber bi $\boldsymbol{\ell}$ ve biçe dema ku $\boldsymbol{x}$ ber bi $+\infty$ ve biçe, wê demê dawiya fonksiyona $\boldsymbol{f}$ li cem $+\infty$ yeksanî $\boldsymbol{\ell}$ ye.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = \ell}$, wê demê $\boldsymbol{y = \ell}$ nêzîker e ji girafîka $\boldsymbol{f}$ re û bi $\boldsymbol{XX'}$ re rastênhev e.

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be li nêzî $-\infty$ û f ber bi $\boldsymbol{\ell}$ ve biçe dema ku $\boldsymbol{x}$ ber bi $-\infty$ ve biçe, wê demê dawiya fonksiyona f li cem $-\infty$ yeksanî $\boldsymbol{\ell}$ ye.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = \ell}$, wê demê $\boldsymbol{y = \ell}$ nêzîker e ji girafîka $\boldsymbol{f}$ re û bi $\boldsymbol{XX'}$ re rastênhev e.

Eger $\boldsymbol{k \neq 0}$ û $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^*$ wê demê:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0 \\ <}} f(x) = -\infty$

wê demê $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ û nêzîkerê girafîka $\boldsymbol{f}$ bi $\boldsymbol{YY'}$ re rastênhev e.

Eger $k > 0$ û $f(x) = \frac{k}{x-a}$ wê demê:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to a}} \frac{k}{x-a} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to a}} \frac{k}{x-a} = -\infty$$

Mînak 2:

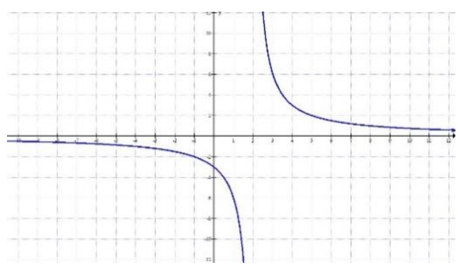
Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R} - 2$ de, li gorî ku: $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{\frac{6}{x-2}}$ be.

a) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ ji aliyê rastê ve li rex $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2}$ bibîne.
b) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ ji aliyê çepê ve li rex $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2}$ bibîne.
c) Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ rex $-\infty$, $+\infty$ bibîne.

Çareserî:

a) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} \left(\frac{6}{x-2}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} \left(\frac{6}{x-2}\right) = -\infty$



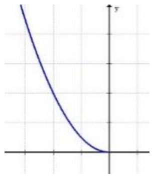
c) $f(x) = \left(\frac{6}{x-2}\right) = \frac{6}{x(1-\frac{2}{x})} = \frac{1}{x}\left(\frac{6}{1-\frac{2}{x}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\left(\frac{6}{1-0}\right) = 0(6) = 0$$

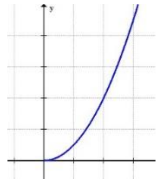
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\left(\frac{6}{1-0}\right) = 0(6) = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

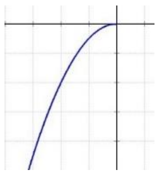
Li ser awayên li jêr bihizire.



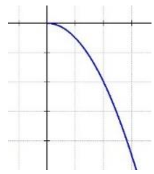
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de, li gorî fonksiyonên li jêr,

Dawiya $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ li rex $+\infty, -\infty$ bibîne.

a) $f(x) = -2x^3$

b) $f(x) = x^2$

Çareserî:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3) = -2\lim_{x\to-\infty}(x^3) + \infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^3) = -2\lim_{x\to+\infty}(x^3) = -\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2) = +\infty$

Eger $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ pir pêkhate bin di $\mathbb{R}$ de, li gorî ku:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$

wê demê:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(a_n x^n)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(a_n x^n)$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n+\cdots+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \begin{cases} \pm\infty & (n>m) \\ \frac{a_n}{b_m} & (n=m),\ (a_n . b_m \neq 0) \\ 0 & (n<m) \end{cases}$

Mînak:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^2+3x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty}(5x^2) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-5x^2+4x+1}{7x^2+2x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-5x^2}{7x^2}\right) = \frac{-5}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^3+x+9}{x^2+3}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^3}{x^2}\right) = \pm\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x^3}\right) = 0$

Teorî:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ li gorî wê: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\sin ax}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$ li gorî wê: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right) = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ax}{\tan ax}\right) = 1$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be, li gorî ku: $f(x) = \frac{\sin 6x}{x}$

Dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ bibîne.

Çareserî:

$f(x) = \frac{\sin 6x}{6x}\times(6)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\times(6) = 1\times(6) = 6$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be, li gorî ku: $f(x) = \frac{\sin 3x - \tan 8x}{x}$

Dawiya $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ li rex 0 bibîne.

Çareserî:

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x} - \frac{\tan 8x}{x} = \frac{\sin 3x}{3x}\times(3) - \frac{\tan 8x}{8x}\times(8)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x} - \frac{\tan x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times(3) - \lim_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{8x}\times(8)$$

$$1\times(3) - 1\times(8) = -5$$

Hînkirin:

1) Yên li jêr çareser bike.

Eger $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$, $D = [-3, +\infty[/\{-2\}$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ bibîne.

Eger $f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{x-1}$, $D = [-\infty, 7[/\{1\}$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ bibîne.

2) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\boldsymbol{D} =]\mathbf{0}, +\infty[$ de, li gorî ku:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$, dawiya $\boldsymbol{f}$ ji aliyê rastê ve li rex $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ bibîne.

3) Dawiya fonksiyonên li jêr li rex $-\infty$ bibîne.

a) $f(x) = x^3 - x + 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x}$

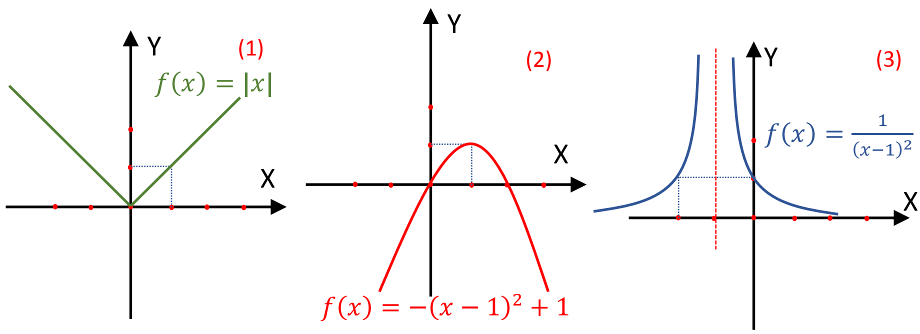
c) $f(x) = -3x + 5x^7$

d) $f(x) = \frac{8}{x^2}$

BERDEWAMIYA FONKSIYONÊ

Eger di xêzkirina girafîka fonksiyonekê de, pênûs neyê rakirin, wê demê em ji fonksiyonê re dibêjin berdewam e.

Mînak:



Fonksyon berdewam e	Fonksyon berdewam e	Fonksyon ne berdewam e

Wek tê dîtin her du fonksiyonên (1) û (2) berdewam in di her xalekê de, ji ber ku qutbûn di girafîkê de nîne, lê (3) ne berdewam e, ji ber ku qutbûn di girafîkê de heye.

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera vekirî de $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$ û $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$, wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e li cem $\boldsymbol{a}$, tenê eger:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Eger $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{I}$, wê demê $\boldsymbol{f}$ ne berdewam e li cem $\boldsymbol{a}$.

Mînak:

Eger $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonek be:

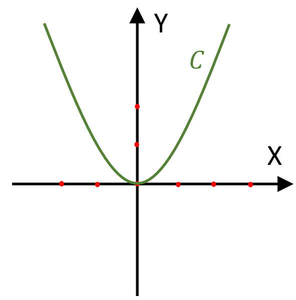
1) Komika endaman bibîne.
2) Tekez bike ku $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x = 3}$ de.
3) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x = 0}$ de yan na?
4) Girafîka wê xêz bike.

Çareserî:

1) Komika endaman $\mathbb{R}$ ye.

2) $x = 3 \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to3} f(x) = \lim\limits_{x\to3}(x^2) = 9$
$f(3) = 9$, li gorî vê, f berdewam e di $x = 3$ de ji ber ku
$\lim\limits_{x\to3} f(x) = f(3)$.

3) $x = 0 \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(x^2) = 0$
lê $\boldsymbol{f(0) = 4}$, li gorî vê, $\boldsymbol{f}$ ne berdewam e di $\boldsymbol{x = 0}$ de ji ber ku
$\lim\limits_{x\to0} f(x) \neq f(0)$.

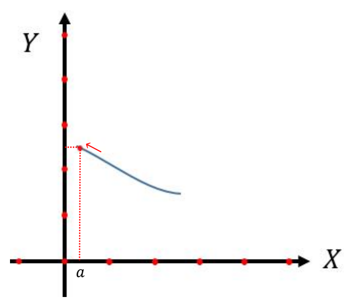


4) Girafîka wê $\boldsymbol{C}$ ye.

Berdewamiya ji aliyê rastê ve di xala $\boldsymbol{x_0}$ de

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera vekirî de $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$ û $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$, wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê rastê ve li cem $\boldsymbol{a}$, tenê eger:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to a}} f(x) = f(a)$$

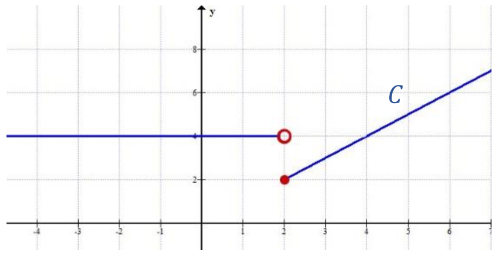


Mînak:

Eger $f(x) = \begin{cases} x & : x \geq 2 \\ 4 & : x < 2 \end{cases}$ fonksiyonek be:

1) Komika endaman bibîne.
2) f berdewam e ji aliyê rastê ve di $\boldsymbol{x = 2}$ de yan na?
3) Girafîka wê xêz bike.

Çareserî:



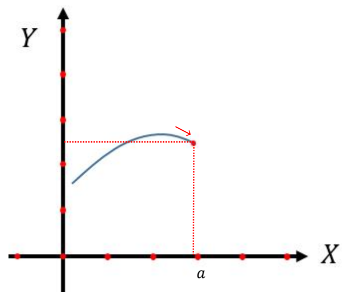
1) Komika endaman $\mathbb{R}$ ye.

2) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} (x) = 2$
$f(2) = 2$, li gorî vê, $\boldsymbol{f}$
berdewam e di $\boldsymbol{x = 2}$ de ji ber ku $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 2}} f(x) = f(2)$.

3) Girafîka wê $\boldsymbol{C}$ ye.

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera vekirî de $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$ û $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$, wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê çepê ve li cem $\boldsymbol{a}$, tenê eger:

$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = f(a)$$

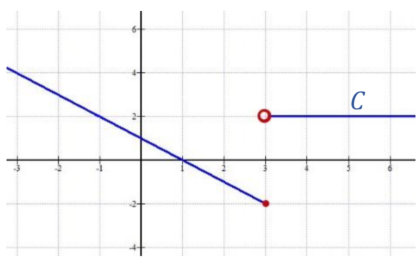


Mînak:

Eger $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & : x \leq 3 \\ 2 & : x < 3 \end{cases}$ fonksiyonek be:

1) Komika endaman bibîne.
2) $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê çepê ve di $\boldsymbol{x = 3}$ de yan na?
3) Girafîka wê xêz bike.

Çareserî:



1) Komika endaman $\mathbb{R}$ ye.

2) $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} (x) = 2$
$f(3) = 2$, li gorî vê, $\boldsymbol{f}$
berdewam e di $\boldsymbol{x = 3}$ de ji ber ku $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} f(x) = f(3)$.

3) Girafîka wê $\boldsymbol{C}$ ye.

Berdewamiya di navbera vekirî û girtî de

1) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera vekirî de $\boldsymbol{I} =]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{I}$ de, tenê eger:
   Eger $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$, wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x_0}$ de.
2) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera girtî de $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ wê demê $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{I}$ de, tenê eger:
   a) $\boldsymbol{f}$ berdewam be di navbera vekirî de $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.
   b] $\boldsymbol{f}$ berdewam be ji aliyê rastê ve li rex $\boldsymbol{a}$.
   c) $\boldsymbol{f}$ berdewam be ji aliyê çepê ve li rex $\boldsymbol{a}$.

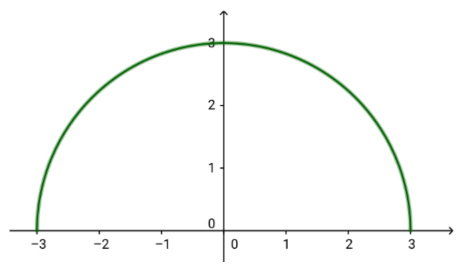
Mînak:

Eger $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonek be:

1) Komika endamên $\boldsymbol{f}$ bibîne
2) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{D}$ de yan na?
3) Girafîka wê xêz bike.

Çareserî:

1) Komika endamên $\boldsymbol{f}$ bi mercê $9 - x^2 \geq 0$
   tê dîtin ku $\boldsymbol{D} = [\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{3}]$ ye.
2) Eger $\boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{-3}, \boldsymbol{3}[$ wê demê
   $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{9 - x^2} =$
   $\sqrt{9 - {x_0}^2} = f(x_0)$ li gorî vê $\boldsymbol{f}$ berdewam e li rex $\boldsymbol{x_0}$, li gorî vê $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $]-3,3[$
   $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê rastê ve di rex -3 de yan na?



   $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(-3)$ li gorî vê $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê rastê ve di rex -3 de.
   tî dîtin ku $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 3}} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0 = f(3)$ li gorî vê $\boldsymbol{f}$ berdewam e ji aliyê çepê ve ve di rex 3 de.
   li gorî pêneseya berdewamiyê di nevbera girtî de, em dibînin ku $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $D = [-3, 3]$
3) Tê dîtin ku girafîka fonksiyona f nîv bazin e, navenda wê $O(0, 0)$ û nîveşkêla wê 3 û li jorî tewareya $\boldsymbol{XX'}$

Hînkirin:

1) Eger $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -2x+4 & x < 1 \end{cases}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de:

a) $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ de berdewam e yan na?

b) girafîka wê xêz bike.

2) Eger $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & : x \neq 2 \\ 3 & : x = 2 \end{cases}$ fonksyionek be:

a) Komika endaman bibîne.

b) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ de yan na?

c) Girafîka wê xêz bike.

3) Eger $f(x) = |x-2|$ fonksiyonek be:

a) Komika endaman bibîne.

b) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ de yan na?

c) Girafîka wê xêz bike.

4) Eger $f(x) = \frac{x}{x+1}$ fonksiyonek be:

a) Komika endaman bibîne.

b) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$ de yan na?

c) Girafîka wê xêz bike.

PIRSÊN BEŞA SÊYEM

1) Yên li jêr çareser bike.

a) Eger $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & x > 3 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ bibîne.

b) Eger $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & x < -2 \\ 1 - 3x & x \geq -2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ bibîne.

2) Dawiya fonksiyonên li jêr li rex $-\infty$ bibîne.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

b) $f(x) = \frac{x^6+2}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{4x^3+7}{x^3-2x^2}$

3) Dawiyên fonksiyonên li jêr di xala $\boldsymbol{a}$ de bibîne. (dibe ku di hin ji wan de pêwistî bi ditîna dawiyê ji her du aliyan ve hebe)

a) $f(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{x}}$, $a = 0$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $a = 0$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{x^3-4}$, $a = 2$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+6x+5}$, $a = -1$

4) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ de, li gorî ku: $f(x) = \frac{3x}{x-1}$ dawiya $\boldsymbol{f(x)}$ li gorî rewşên jêr bibîne.

a) ji alê rastê ve rex $\boldsymbol{x = 1}$

b) ji alê çepê ve rex $\boldsymbol{x = 1}$

c) rex $-\infty$, $+\infty$

5) yên li jêr bibîne.

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{\sin 9x}{4x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{x.\sin x}{3x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \tan x}{x^5}$

6) Eger $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & : x < 0 \\ x^2 + 1 & : x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonek be:

a) Komika endaman bibîne.
b) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x = 0}$ de yan na?
c) Girafîka wê xêz bike.

7) Eger $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 3 & : x = 0 \end{cases}$ fonksiyonek be:

a) Komika endaman bibîne.
b) $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x = 0}$ de yan na?
c) Girafîka wê xêz bike.

8) Eger $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geq -2 \\ ax - 5b & x < -2 \\ 3 & x = -2 \end{cases}$ fonksiyonek be:

a) Eger $\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\boldsymbol{x = -2}$ de, $\boldsymbol{a}$ û $\boldsymbol{b}$ bibîne.
b) Girafîka wê xêz bike.

BEŞA ÇAREM: DARAŞTIN

1) Daraştin
2) Guhertinên fonksiyonên hejmarî
3) Nêzîker
4) Fonksiyona rader

DARAŞTIN

Meyla pêvek

Meyla pêveka fonksyona $y = f(x)$ di xala $M_0(x_0, y_0)$ ev e:

$m = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bi mercê ku dawî endamê $\mathbb{R}$ be.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ û $\boldsymbol{M}_{\mathbf{0}}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$xalek be jê, û $\boldsymbol{M}$ xaleke ji $\boldsymbol{C}$ ku pêkhateya wê li ser tewareya $\boldsymbol{Y}$, $\mathbf{1} + \boldsymbol{\Delta x}$ e.

a) Hevkêşeya pêveka $\boldsymbol{T}$ ji $\boldsymbol{C}$ re di xala $\boldsymbol{M}_{\mathbf{0}}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ de, bibîne.
b) Hevkêşeya rasteka $\boldsymbol{d}$ ya ku bi $\boldsymbol{T}$ re di xala $\boldsymbol{M}_{\mathbf{0}}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ de tîk e, bibîne.

Çareserî:

a) Meyla rasteka ku ji xala $\boldsymbol{M}_{\mathbf{0}}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ digihêje xala M ev e:

$$m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2x^2 - 2}{\Delta x} == 4 + 2\Delta x$$

li gorî vê, meyla pêvekê ev e:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + 2\Delta x) = 4$$

li gorî vê, hevkêşeya pêvekê ev e: $y - 2 = 4(x - 1)$

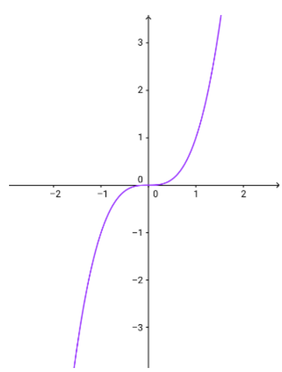
b) Eger $\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{d}}$ meyla rasteka $\boldsymbol{d}$ be, û ji ber ku $\boldsymbol{T} \perp \boldsymbol{d}$ li gorî vê:

$m_d . m_T = -1$

$m_d = \frac{-1}{4}$ li gorî vê, hevkêşeya pêvek:

$y - 2 = \frac{-1}{4}(x - 1)$

Daraştin



Eger $\boldsymbol{C}$ girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ be di $\mathbb{R}$ de li gorî ku $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$

Em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ di $\mathbb{R}^*$ de bi vî awayî binivîsin:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3-0}{x-0} = x^2$$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}$ de û $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$, û fonksyona $\boldsymbol{g}$ bi vî awayî were dayîn: $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ li gorî ku $\boldsymbol{I}\backslash\{\boldsymbol{x_0}\}$.

Em ji $\boldsymbol{f}$ re dibêjin **daraştî** ye di $\boldsymbol{x_0}$, tenê eger:

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m(x_0) \in \mathbb{R}$

Wê demê ji $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to x_0}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ re **hejmara daraştî** ji $\boldsymbol{f}$ re tê gotin, sembola wê jî $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x_0})$

Tê dîtin ku hejmara daraştî $\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x_0})$ meyla pêveka girafîka fonksyona f bi xwe ye, carinan jê re **meyla** $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x_0}$ de tê gotin.

Têbînî:

Eger $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ wê demê f nayê daraştin di x_0 de.

Mînak:

Fonksiyona $\boldsymbol{f}$ di $\mathbb{R}$ de li gorî $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ de, tê daraştin an na?

Çareserî:

Em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ di $\mathbb{R}^*$ de binivîsin:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = +\infty$$

Li gorî vê, $\boldsymbol{f}$ ne daraştî ye di $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ de.

Daraştina ji aliyê rast û çepê ve di xalekê de.

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera $I_1 =]x_0 - a, x_0[: a > 0$ de

Û fonksyona $\boldsymbol{g}$ di navbera $]x_0 - a, x_0[$ de be, bi vî awayî were dayîn: $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Em ji $\boldsymbol{f}$ re dibêjin daraştî ye di $\boldsymbol{x_0}$ de ji aliyê çepê ve, tenê eger:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{m_1(x_0)} \in \mathbb{R}$$

Û ji vê dawiyê re $\boldsymbol{m_1(x_0)}$ hejmara daraştî di $\boldsymbol{x_0}$ de ji aliyê çepê ve, tê gotin.

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksyonek be di navbera $I_2 =]x_0, x_0 + \beta[: \beta > 0$

Û fonksyona $\boldsymbol{g}$ di navbera $]x_0, x_0 + \beta[$ de be, bi vî awayî were dayîn: $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Em ji $\boldsymbol{f}$ re dibêjin daraştî ye di $\boldsymbol{x_0}$ de ji aliyê rastê ve,
tenê eger: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{m_2(x_0)} \in \mathbb{R}$

Û ji vê dawiyê re $\boldsymbol{m_2(x_0)}$ hejmara daraştî di $\boldsymbol{x_0}$ de ji aliyê rastê ve, tê gotin.

Eger f fonksyonek be di her du navberên I_1, I_2 de, û berdewam be di x_0 de, wê demê f daraştî ye di x_0 eger:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \boldsymbol{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \boldsymbol{g(x)} = \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di navbera $[\mathbf{1}, +\infty[$ li gorî ku $f(x) = \sqrt{x-1}$ daraştina $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ de ji aliyê rastê ve, bibîne.

Çareserî:

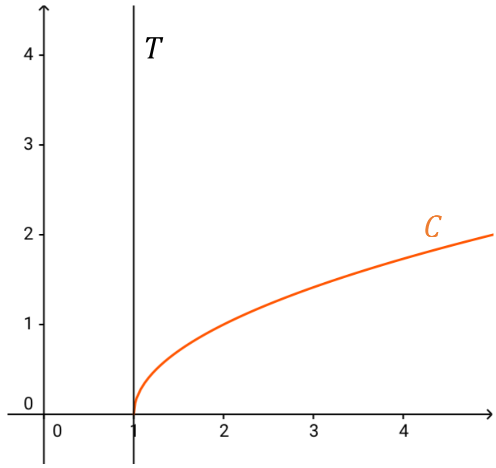
Em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ di $\mathbb{R}^*$ de binivîsin:

$g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

tê dîtin ku:

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} g\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = +\infty$

Li gorî vê, fonksiyona $\boldsymbol{f}$ ne daraştî ye di $\boldsymbol{x = 1}$ ji aliyê rastê ve.



Mînak 2:

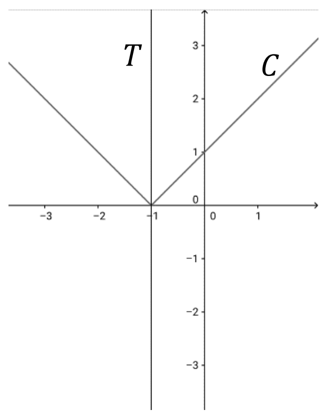
Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de li gorî ku $f(x) = |x+1|$ daraştina $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{x = -1}$ de, bibîne.

Çareserî:

Em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ di $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ de binivîsin:

$g(x) = \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{|x+1|}{x+1}$

tê dîtin ku:



$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{-x-1}{x+1} = m_1(-1) = -1 \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to -1}} \left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \frac{x+1}{x+1} = m_2(-1) = 1 \in \mathbb{R}$

Tê dîtin ku $m_1(0) \neq m_2(0)$ ango daraştin ji aliyê çep û rastê ve, ne wek hev in, li gorî vê fonksiyona $\boldsymbol{f}$ ne daraştî ye di $\boldsymbol{x = 0}$ de.

Dîtina fonksiyona daraştî ya fonksiyona f

Eger $\boldsymbol{f}$ berdewam be di navbera vekirî de $\boldsymbol{I}$, ji bo dîtina fonksiyona daraştî ji $\boldsymbol{f}$ re, em fonksiyona $\boldsymbol{g}$ bi vî awayî binivîsin:

$$g(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad : \quad \Delta x \neq 0$$

Û em $\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)$ bibînin, li gorî wê, fonksiyona daraştî ji $\boldsymbol{f}$ ev e:

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = f'(x)$$

Mînak:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = 3x^2 + 2$ $\boldsymbol{f'(x)}$ bibîne.

Careserî:

$$g(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6x + 3\Delta x = 6x$$

Li gorî vê $\boldsymbol{f'(x) = 6x}$

Rêgezên daraştina hin fonksiyonan

Fonkisyon	daraştin	Navber
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in [0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^*$

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in [0, +\infty[$

Mînak:

fonkisyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$f(x) = 2x + 5$	$f'(x) = 2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 2x^6$	$f'(x) = 2.(6)x^{6-1} = 12x^5$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$	$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x.\sqrt{x^7} = x.x^{\frac{7}{2}} = x^{\frac{9}{2}}$	$f'(x) = \frac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-1} = \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{x^2}{x^5} = x^{-3}$	$f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$	$\mathbb{R}$

Tewriyên daraştinê:

Karanînên bi fonksiyonên daraştî re

Rêgeza daraştinê	Navê karanînê
$(u+v)' = \boldsymbol{u' + v'}$	Daraştina komkirina du fonksiyonan
$(u.v)' = \boldsymbol{u'v + v'u}$	Daraştina hevdana du fonksiyonan
$(au)' = \boldsymbol{au'}$	Daraştina hevdana fonksiyonekê bi hejmarekê re
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{u^2}}$	Daraştina vajiyê fonksionê
$\left(\frac{u}{v}\right)' = -\frac{\boldsymbol{u'v - v'u}}{\boldsymbol{v^2}}$	Daraştina parvekirina du fonksiyonan
$f(x) = \left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}\sqrt{g(x)}}$	Daraştina fonksiyona kokî
$([g(x)]^n)' = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$	Daraştina fonksiyona bi hêz
$(\sin g(x))' = \boldsymbol{g'(x).\cos g(x)}$	Daraştina fonksiyonên sêgoşeyî
$(\cos g(x))' = \boldsymbol{-g'(x).\sin g(x)}$	

Mînak:

fonksiyon	Fonksiyona daraştî	Navbera daraştinê
$f(x)=4x^3+5x^2$	$f'(x)=12x^2+10x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}+x^5$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+5x^4$	$[0,+\infty[$
$f(x)=x.e^x$	$f'(x)=(x)'e^x+(e^x)'x$ $=e^x+e^x x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$	$f'(x)=\frac{(3x+1)'(x-1)-(x-1)'(3x+1)}{(x-1)^2}$ $=\frac{(3)(x-1)-(1)(3x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$
$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ Awa (1)	$f'(x)=\dfrac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}$ $=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$[-\infty,-1[$ $\cup\,[1,+\infty[$
$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $=(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$ Awa (2)	$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{-1}{2}}(x^2-1)'$ $=\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{-1}{2}}(2x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$[-\infty,-1[$ $\cup\,[1,+\infty[$
$f(x)=(3x-2)^3$	$f'(x)=3(3x-2)^2(3x-2)'$ $=3(3x-2)^2(3)=9(3x-2)^2$	$\mathbb{R}$

Hînkirin:

Daraştina fonksiyonên li jêr bibîne.

1) $f(x)=2x^5-3x^3-3x$ **2)** $f(x)=\sqrt{x+2}$

3) $f(x)=\sqrt{x+1}+e^x$ **4)** $f(x)=\frac{2x}{5x-1}$

5) $f(x)=\frac{1}{x}-x\ln(x)$ **6)** $f(x)=\frac{4}{x-1}$

7) $f(x)=\sin(5x)$ **8)** $f(x)=e^x+\sin(3x)$

9) $f(x)=sin^3(x)$ **10)** $f(x)=(e^x+1)^3$

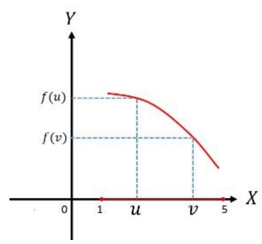
11) $f(x)=(x^2-5x)^7$ **12)** $f(x)=(3-4x)^2$

GUHERTINÊN FONKSIYONÊN HEJMARÎ

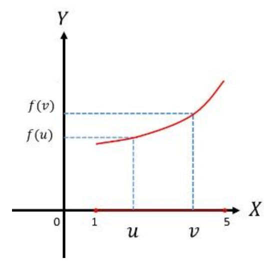
Fonksiyona kêmker û fonksiyona zêdeker

Eger $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ du xal bin li ser tewariya $\boldsymbol{XX'}$ û $\mathbf{f}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ guhertina her du xalan e li ser tewareya $\boldsymbol{YY'}$, wê demê:

Fonksiyon	Newekhevî	Mercê pêkanînê
Tam zêdeker	$v > u$	$\mathrm{f}(v) > f(u)$
Zêdeker	$v > u$	$\mathrm{f}(v) \geq f(u)$
Tam kêmker	$v > u$	$\mathrm{f}(v) < f(u)$
kêmker	$v > u$	$\mathrm{f}(v) \leq f(u)$



Fonksiyon tam kêmker e



fonksiyon tam zêdeker e

Teorî:

Eger $\boldsymbol{f}$ di navbera $\boldsymbol{I} =]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ de daraştî be:

1) $\boldsymbol{f}$ Tam zêdeker di I $de \Leftrightarrow f'(x) > 0$ di $\boldsymbol{I}$ de û $f'(x) \neq 0$ di her navbereke ji $\boldsymbol{I}$ de.
2) $\boldsymbol{f}$ Tam kêmker di I $de \Leftrightarrow f'(x) < 0$ di $\boldsymbol{I}$ de û $f'(x) \neq 0$ di her navbereke ji $\boldsymbol{I}$ de.
3) $\boldsymbol{f}$ neguhêr e di $\boldsymbol{I}$ de $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ di $\boldsymbol{I}$ de.

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyoneke daraştî be di $\mathbb{R}$ de û $f(x) = x^3 + 3x - 2$, $\boldsymbol{f'(x)}$ bibîne.

Çareserî:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$$

Li gorî vê $\boldsymbol{f}$ Tam zêdeker e di $\mathbb{R}$ de.

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyoneke daraştî be di $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ de û $f(x) = \frac{1}{x}$, $\boldsymbol{f'(x)}$ bibîne.

Çareserî:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Li gorî vê $\boldsymbol{f}$ Tam kêmker e di $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ de.

Guherînên fonksiyonên hejmarî

Ji bo dîtina guherîna fonksiyonekê:

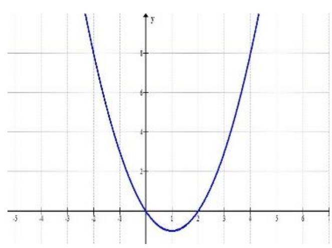
1) Em komika endaman û navbera berdewamiyê bibînin.
2) Em nirxên fonksiyonê di aliyên navberên berdewam yên girtî de û dawiyên fonksiyonê di aliyên navberên berdewam yên vekirî de bibînin.
3) Em guherîna fonksiyonê li gorî hêmaya daraştina wê bibînin,

Em tabloyekî ji bo agahiyên li jor xêz bikin û navê wê dibe tabloya guherîna fonksiyonê.

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = x^2 - 2x$, guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne û tabloyekî xêz bike.

Çareserî:



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

Eger $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 2 = 0 \Longrightarrow 2(x - 1) = 0$

$\Longrightarrow x = 1$ li gorî vê $f(1) = -1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

$\boldsymbol{f}$ kêmker e di navbera $]-\infty, 1]$ de.

$\boldsymbol{f}$ zêdeker e di navbera $[1, +\infty[$ de.

Nirxê herêmî:

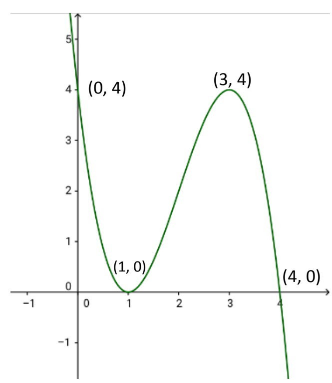
Nirxê ku pê daraştina yekem dibe sifir ($f'(x) = 0$) û hêmaya xwe diguhere.

$\mathbf{N}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))$ xalek e ji girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ û fonksiyon di xala N de zêdekeriya xwe bi dawî dike û dest bi kêmkeriyê dike.

$\mathbf{N}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}))$ xalek e ji girafîka fonksiyona $\boldsymbol{f}$ û fonksiyon di xala N de kêmkeriya xwe bi dawî dike û dest bi zêdekeriyê dike.

Mînak:

Di awayê li rexê de:



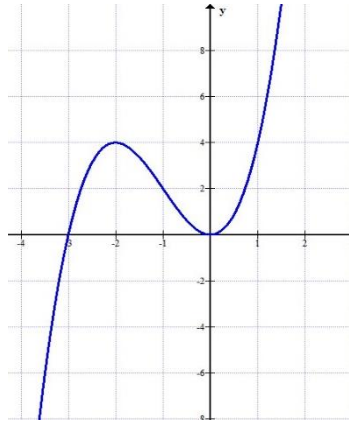
- Xala (1, 0) nirxê herêmî yê biçûk e, ji ber ku $\boldsymbol{f}$ di xala $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ de kêmkeriya xwe bi dawî dike û dest bi zêdekeriyê dike, û fonkisyona daraştî $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ hêmaya xwe ji negatîf diguhere pozîtîf.
- Xala (3, 4) nirxê herêmî yê mezin e, ji ber ku $\boldsymbol{f}$ di xala $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$ de zêdekeriya xwe bi dawî dike û dest bi kêmkeriyê dike, û fonkisyona daraştî $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ hêmaya xwe ji pozîtîf diguhere negatîf.

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = x^3 + 3x^2$

a) guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne.
b) Nirxên mezin û biçûk nîşan bike.

Çareserî:



$\boldsymbol{f}$ berdewam e di $\mathbb{R}$ de.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

Eger $f'(x) = 0 \implies 3x^2 + 6x = 0$

$3x(x+2) = 0$ li gorî vê:

$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -2$

$f(0) = 0 \quad , \quad f(-2) = 4$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

$\boldsymbol{f}$ zêdeker e di $]-\infty,-2]$ de.

$\boldsymbol{f}$ kêmker e di $[-2,0]$ de.

$\boldsymbol{f}$ zêdeker e di $[0,+\infty[$ de.

b) $f(-2) = 4$ nirxê herêmî yê mezin e.
$f(o) = 0$ nirxê herêmî yê biçûk e.

Hînkirin:

1) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de:

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ be.

a) guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne û tabloyekî xêz bike.
b) Nirxên mezin û biçûk nîşan bike.

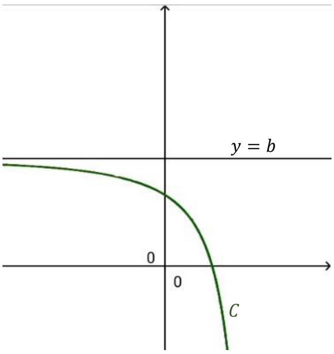
2) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $[\mathbf{0}, +\infty[$ de:

$f(x) = 2\sqrt{x} - x$ be.

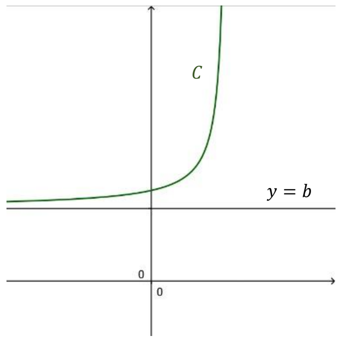
a) guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne û tabloyekî xêz bike.
b) Nirxên mezin nîşan bike.

NÊZÎKER

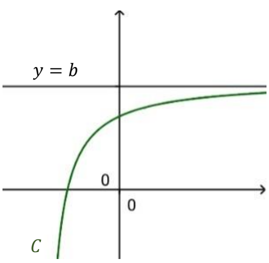
Nêzîkerê bi tewareya XX' re rastênhev e.



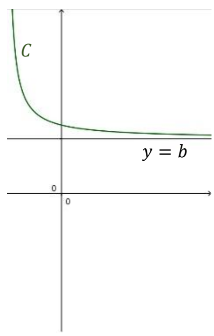
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = b$$

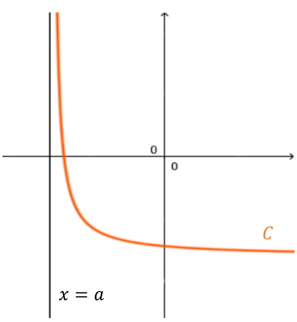


$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b$$

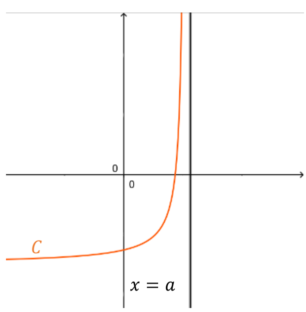


$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b$$

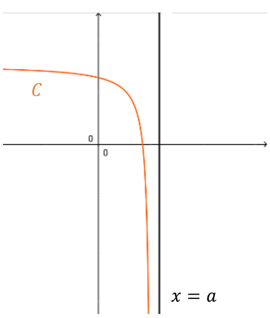
Nêzîkerê bi tewareya YY' re rastênhev e.



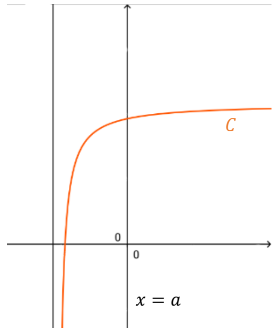
$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = -\infty$$

Ji bo dîtina rastekên nêzîker ên girafîka fonksiyonê:

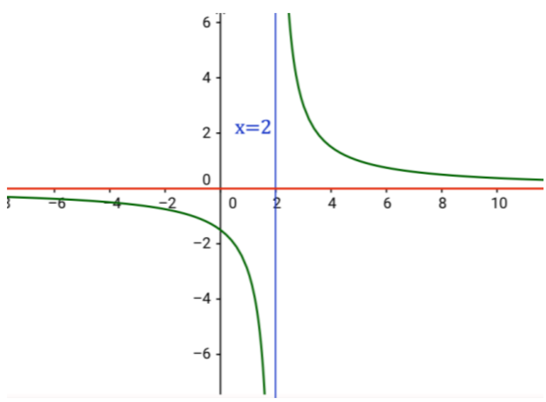
1) Em ê navberên berdewamiya fonksiynê bibînin.
2) Piştre dawiya $\boldsymbol{f}$ li her du aliyên vekirî bibînin.

Dawî	Nêzîkerê stûnî û raketî
$\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = b}$	$y = b$ nêzîkerê girafîka f, bi XX' re rastênhev e.
$\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = b}$	$y = b$ nêzîkerê girafîka f, bi XX' re rastênhev e.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$	$x = a$ nêzîkerê girafîka f, bi YY' re rastênhev e.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \boldsymbol{f(x)} = +\infty$	$x = a$ nêzîkerê girafîka f, bi YY' re rastênhev e.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$	$x = a$ nêzîkerê girafîka f, bi YY' re rastênhev e.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$	$x = a$ nêzîkerê girafîka f, bi YY' re rastênhev e.

Mînak:

Eger $f(x) = \frac{3}{x-2}$ fonksiyonek be.

a) Komika endaman bibîne.
b) Nêzîkerên $\boldsymbol{f}$ bibîne.



Çareserî:

a) $D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{+\infty} = 0 \Longrightarrow y = 0$ nêzîker li ser tewareya XX' e li rex $(+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{-\infty} = 0 \Longrightarrow y = 0$ nêzîker li ser tewareya XX' e li rex $(-\infty)$

$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}} (\frac{3}{x-2}) = +\infty \Longrightarrow x = 2$ nêzîker bi tewareya XX' re rastênhev e li rex $(+\infty)$

$\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(\frac{3}{x-2}) = -\infty \Longrightarrow x = 2$ nêzîkerê bi tewareya XX' re rastênhev e li rex $(-\infty)$

FONKSIYONA RADER

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di navbera $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ de, wê demê

***F* fonksiyoneke radar** e ji fonksiyona $\boldsymbol{f}$ re di $\boldsymbol{I}$ de $\Leftrightarrow$

1) fonksiyona F daraştî ye di navbera $\boldsymbol{I}$ de.
2) Eger $x \in I \Longrightarrow F'(x) = f(x)$

Mînak:

Fonksiyona rader $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{F'}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 3$	$\boldsymbol{f}(x) = 2\boldsymbol{x} + 2$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + 4}$	$\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2 + 4}}$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sin \boldsymbol{x} + 6$	$\boldsymbol{f}(x) = \cos x$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{f}(x) = -\dfrac{1}{\boldsymbol{x}^2}$

Fonksiyonên rader ji hin fonksiyonên naskirî re

Di tabloya li jêr de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ fonksiyoneke rader ji $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ re, C neguhêr e

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	nevber $\boldsymbol{I}$
$\mathbf{0}$	C	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\boldsymbol{a} \ : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*$	$ax + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\sin \boldsymbol{x}$	$-\cos x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
$\cos \boldsymbol{x}$	$\sin x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = 9x^2 + 5x$, $F(x)$ bibîne.

Çareserî: $F(x) = \frac{9x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + c$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(x)$ bibîne.

Çareserî: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Fonksiyona rader ya daraştina fonksiyonekê

Eger $\boldsymbol{g}$ fonksiyoneke daraştî be di $I \subseteq \mathbb{R}$ de û $\boldsymbol{g'}$ daraştina $\boldsymbol{g}$ be di $\boldsymbol{I}$ de

eger $f(x) = g'.g^r$ wê demê $F(x) = \frac{g^{r+1}}{r+1} + c$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = x.\sqrt{x^2 - 4}$, $F(x)$ bibîne.

Çareserî: $f(x) = \frac{1}{2}(2x).\sqrt{x^2 - 4}$

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x).(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2 - 4)'(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{(x^2 - 4)^3} + c = \left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{(x^2 - 4)^3} + c$$

Mînak 2:

Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = \cos x \, . \sin^4 x$, $\boldsymbol{F(x)}$ bibîne.

Çareserî: Eger $\mathrm{g}(x) = \sin x$ û $g'(x) = \cos x$ be,

Wê demê $f(x) = g'(x).g^4(x)$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{\sin^5 x}{5} + c}$$

PIRSÊN BEŞA ÇAREM

1) Daraştina fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = -5x^3 + 6x^2 - 7x - 4$ **b)** $f(x) = (3x-1)(4x+7)$

c) $f(x) = \frac{2x^9}{6}$ **d)** $f(x) = \left(\sqrt{x} + 3\right)^2$

e) $f(x) = x\sin(x)$ **f)** $f(x) = x^3 + 4\cos x$

2) Daraştina fonksiyonên li jêr bibîne.

a) $f(x) = \sqrt{x+1} + e^x$ **b)** $f(x) = \frac{2}{3x-8}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{1-x^2}$ **d)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

e) $f(x) = \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ **f)** $f(x) = \frac{1}{3-x} + 7x - 2$

g) $f(x) = \frac{1}{x} - xe^x$ **h)** $f(x) = \frac{4x-1}{x^2}$

i) $f(x) = \sin(2x + \pi)$ **j)** $f(x) = e^x + \sin(3x)$

k) $f(x) = cos^4(x)$ **l)** $f(x) = (e^x + 1)^3$

3) Guherîna fonksiyonên li jêr li gorî navberên wan, bibîne.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ di navbera $[0, +\infty[$ de.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ di $\mathbb{R}/\{0\}$ de.

c) $f(x) = -x^3$ di $\mathbb{R}$ de.

d) $f(x) = -x^2$ di $\mathbb{R}$ de.

4) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = x^3 + 3x - 1$

a) Guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne û tabloyekî xêz bike.

b) Hevkêşeya pêveka $\boldsymbol{T}$ ji $\boldsymbol{c}$ re di xala $\boldsymbol{M_0(0,1)}$ de, bibîne.

c) $\boldsymbol{T}$ û $\mathbf{C}$ xêz bike.

5) Eger $\boldsymbol{f}$ fonksiyonek be di $\mathbb{R}$ de : $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$,

a) Guherîna $\boldsymbol{f}$ bibîne û tabloyekî xêz bike, Hevkêşeya nêzîkerê girafîka $\boldsymbol{f}$, bibîne.
b) Hevkêşeya pêveka $\boldsymbol{T}$ ji $\boldsymbol{c}$ ya bi $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ re rastênhev, binvîse.
c) Her nêzîkerekê û pêvekekê xîz bike. piştre $\boldsymbol{c}$ jî xîz bike.

6) Fonksiyona bingih $\boldsymbol{F}$ ji fonksiyonên li jêr bibîne.

1) $f(x) = x^3 + 6x - 14$ $\quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = (x^2 + 1)^4$ $\quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 3\sqrt{x} + 4$ $\quad I = [0, +\infty[$

4) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 6$ $\quad I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ $\quad I = \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$

6) $f(x) = \frac{\sin(x)}{cos^2(x)}$ $\quad I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

7) $f(x) = sin^4(x)$ $\quad I = \mathbb{R}$

7) Fonksiyona bingih $\boldsymbol{F}$ ji fonksiyonên li jêr bibîne.

1) $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x^2}$ $\quad I =]0, +\infty[$

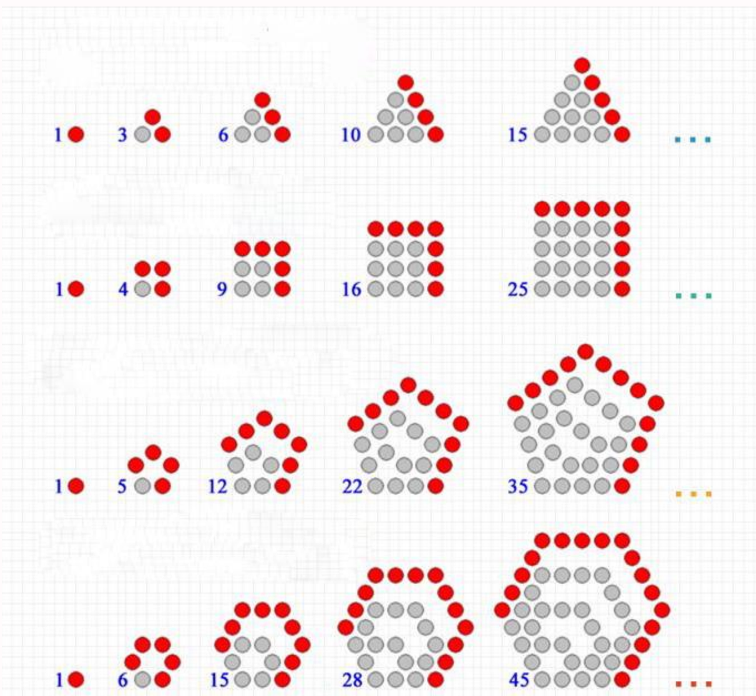
2) $f(x) = x(x^2 + 1)^3$ $\quad I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$ $\quad I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = x\sqrt{x + 1}$ $\quad I = [-1, +\infty[$

BEŞA PÊNCEM: PEYHATÎ

1) Peyhatî
2) Peyhatiya geometrî
3) Dawiya peyhatiyê



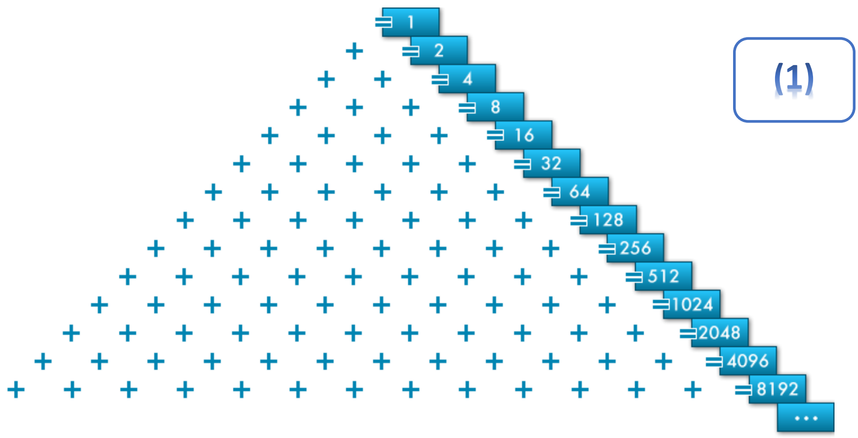
Di dibistana gundekî Elmanî de, mamosteyekî xwest şagirtên xwe yên 8 salî bi karekî mijûl bike, ji wan xwest ku encama komkirina hejmarên ji 1 ta 100 bibînin, lê piştî 5 xulekan, yek ji wan şagirtan bi lez bersiv da û got: 5050 ye! Mamoste matmayî ma, çawa vî bersiv nas kir? Ew şagirt **Gauss** bû.

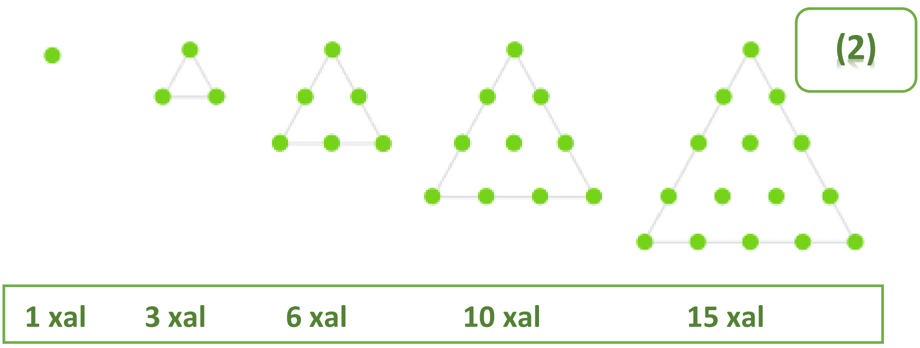
Gauss **(Carl Friedrich Gauss)** 1777-1855 P.Z

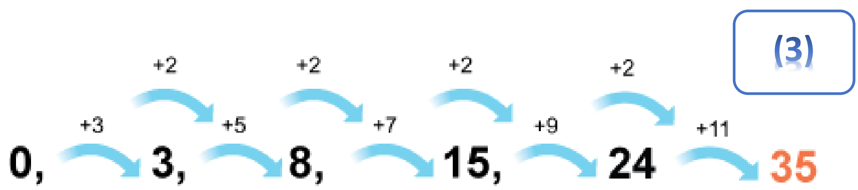
Zaniyarekî Elmanî ye, di bîrkarî de pir navdar e. Rola wî di pêşxistina bîrkarî de û têkiliyên wê bi fîzîk, elektirîka magnatîsî û kêşana erdê re roleke pir mezin bû.

PEYHATÎ

li ser awayên li jêr bihizire.







Di van awayan de tê dîtin, hejmar bi awayekî bi rêk û pêk zêde yan jî kêm dibin, ji van karanînan re **peyhatî** tê gotin. Di peyhatiyan de her hejmarek jê re **pêkhate** tê gotin û sembola wê a ye û bi vî awayî tên rêzkirin:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\ a_n$$

Pênaseya peyhatiyan:

Peyhatî bi du awayan tên pênasekirin:

1) Awayê rasterast:

Fonksiyona $\boldsymbol{f}$ ya ku komika endamên wê $\mathbb{N}$ ye, û komika nirxên wê binkomika $\mathbb{R}$ ye.

peyhatî bi vî awayî tê nivîsandin: $f : D \rightarrow \mathbb{N}: n \rightarrow f(n)$

Ji $a_n = f(n)$ re radeya giştî tê gotin,
sembola peyhatiyê bi kurtî (a_n) : $(a_n)_{n\geq 0}$

Awayê nivîsandinê: $a_n = f(n)$ yan jî $a_1, a_2, a_3, \dots \dots\ a_n$

Peyhatî bi pêkhateya giştî û komika endaman tê dayîn, lê eger komika endaman diyar nebe, wê demê, komika endaman $\mathbb{N}$ ye.

Mînak 1:

Eger $2, 4, 6, 8, \dots \dots$ peyhatiyeke hejmarî be, komika endamên wê $\mathbb{N}$ be, pêkhateyên wê hejmarên cot in, pêkhateya destpêkê $\boldsymbol{a_1 = 2}$ û pêkhateya giştî $\boldsymbol{a_n = 2n}$ ye.

Mînak 2:

1, 3, 5, 7, …. Peyhatiyeke hejmarî ye ku komika endamên wê $\mathbb{N}$ ye pêkhateyên wê hejmarên kit in $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5, \dots$ û pêkhateya giştî jî $\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$ e.

Mînak 3:

Eger $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$ peyhatiyek be, em hin nirxên wê rêz bikin:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \frac{15}{8}, \frac{17}{9}, \dots\ 2 - \frac{1}{n}$$

Eger em van xalan li ser rasteka hejmaran rêz bikin, wê diyar bibe ku ev peyhatî her ku biçe nêzîkî hejmara 2 bibe, ango dawiya wê nêzîkî hejmara 2 dibe lê nagihêje wê.

2) Forma vegerok

Peyhatiyeke ku pêkhateya wê ya giştî li gorî pêkhateyên berî wê yan hin ji wan, tê dayîn. Ji pêkhateya giştî re **forma vegerok** a peyhatiyê, tê gotin.

Mînak 1:

Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ peyhatiyeke vegerok be, pêkhateya destpêkê $\boldsymbol{a_0} = \mathbf{3}$ û forma vegerok $\boldsymbol{a_{n+1}} = \mathbf{2}\boldsymbol{a_n} - \mathbf{1}$ be, em dikarin her pêkhateyekê li gorî pêkhateya berî wê bibînin.

$a_1 = 2a_0 - 1 = 5$

$a_2 = 2a_1 - 1 = 9$

$a_3 = 2a_2 - 1 = 17$

Li gorî vê mînakê, em dikarin pêkhateya $\boldsymbol{a_{n+1}}$ li gorî pêkhateya a_n ya berî wê bibînin. $\boldsymbol{a_n} + \mathbf{1} = \boldsymbol{f}(\ \boldsymbol{a_n})$ û fonkision f bi vî awayi tê nivîsandin $\boldsymbol{f}(\ \boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}$

Mînak2:

Eger $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots (a_n)$ peyhatiyeke vegerok be, forma vegerok û pêkhateya giştî bibîne.

Çareserî:

Em dibînin ku:

$a_1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 2\times 2 = 2.a_1$

$a_3 = 2^3 = 2\times 2^2 = 2.a_2$

$a_n = a_{1.}r^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*\{1\})$ (zagona vegerok)

Diyar e ku ev peyhatiyeke geometrî ye, bingeha wê $\boldsymbol{r} = \mathbf{2}$ û pêkhateya wê ya giştî $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_{1.}r^{n-1}}$

Peyhatiya bi dawî û ya bê dawî

Eger pêkhateyên peyhatiyê bi dawî bin, peyhatî bi dawî ye û eger pêkhateyên peyhatiyê bê dawî bin, peyhatî bê dawî ye.

Peyhatiya zêdeker, tam zêdeker, kêmker, tam kêmker û ya neguhêr

(a_n)	Zêdeker	Eger $n \in D$ wê demê $a_{n+1} \geq a_n$
(a_n)	Tam zêdeker	Eger $n \in D$ wê demê $a_{n+1} > a_n$
(a_n)	Kêmker	Eger $n \in D$ wê demê $a_{n+1} \leq a_n$
(a_n)	Tam kêmker	Eger $n \in D$ wê demê $a_{n+1} < a_n$
(a_n)	xwecih	Eger $n \in D$ wê demê $a_{n+1} = a_n$

Dîtina tevgera peyhatiyekê bi karanîna yek ji yên li jêr:

a) Em hêmaya $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n}$bibînin.
b) Hevrûkirina rêjeya $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}$ bi hejmara 1 re, lê divê pêkhateyên peyhatiyê tam pozîtîf bin.
c) Dîtina tevgera fonksiyona $\boldsymbol{f}$, lê divê fonksiyon bi vî awayî be: $a_n = f(n)$

Mînak 1:

Eger $\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$ pêkhateya giştî ya peyhatiyekê be.

Ev peyhatî, zêdeker an kêmker e?

Çareserî:

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - (2n - 1\,) = 2 > 0$$

Li gorî vê, $a_{n+1} > a_n$, peyhatî tam zêdeker e,

Mînak 2:

Eger $a_n = \frac{1}{2^n}$ peyhatiyek be

Ev peyhatî, zêdeker a yan kêmker e?

Çareserî:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{1} = \frac{1}{2}$$

Lê $\frac{1}{2} < 1$, li gorî vê peyhatî tam kêmker e.

Peyhatiya hejmarî

Li ser awayê li jêr bihizire.

Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama komkirina pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê, jê re **peyhatiya hejmarî** tê gotin.

Mînak: (2, 5, 8, 11, 14, …) $d = 3$

$a_{n+1} - a_n = d$ yan $a_{n+1} = a_n + d$

Mînak

Eger $\boldsymbol{a_1 = 3, d = 7}$ be, her pênc pêkhateyên destpêkê ji payhatiyê re bibîne.

Çareserî:

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 + d = 3 + 7 = 10$

$a_3 = a_2 + d = 10 + 7 = 17$

her pinc pêkhateyên destpêkê: 3, 10, 17, 20, 23, ……….

$(a_n) = (3, 10, 17, 20, 23, \ldots\ldots\ldots)$

Pêkhateya giştî ji peyhatiya hejmarî re

Eger $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a}$ pêkhateya yekem be û $\boldsymbol{a_n}$ pêkhateya giştî be, wê demê:

$a_1 = a$

$a_2 = a + d$

$a_3 = a + 2\,d$

$a_4 = a + 3\,d$ li gorî vê:

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d \;:\; n \in \mathbb{N}^*}$$

Bi giştî eger $\boldsymbol{n, p} \in \mathbb{N}^*$ bin, wê demê:

$$\boldsymbol{a_n = a_p + (n-p)d}$$

Mînak

Eger (2, 5, 8, ……) peyhatiyeke hejmarî be, pêkhateya yazdehan (11) û sed û yekê (101) bibîne.

Çareserî:

$a_1 = 2 \quad , \quad d = 5 - 2 = 3$

- $a_{11} = a + 10\,d$

$a_{11} = 2 + 10\,(3) = 32$

- $a_{101} = a + 100\,d$
  $a_{101} = 2 + 100\,(3) = 302$

Têbînî:

Ji bo em tekez bikin peyhatî hejmarî ye, divê $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = d}$ be.

Mînak

Eger $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{4n - 1}$, $\boldsymbol{ji\ her\ n} \in \mathbb{N}^*$ peyhatiyeke be, tekez bike ku peyhatiyeke hejmarî ye.

Çareserî:

$a_n = 4n - 1$

$a_{n+1} = 4(n+1) - 1 = 4n + 3$

$a_{n+1} - a_n = (4n-1) - (4n+3) = 4$ (const)

Li gorî vê $a_n = 4n - 1$ peyhatiyeke hejmarî ye.

Komkirna pêkhateyên peyhatya hejmarî

Komkirina peyhatiya li jêr bibîne.

(1,2,3,4,5, ……….,98,99,100)

Ji bo dîtina encamê, em awayê **Gauss** pêk bînin:

$$s_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$+\ s_{100} = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

$$2s_{100} = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101$$

$$2s_{100} = 101 \times 100$$

$$= 10100$$

$$s_{100} = \frac{10100}{2}$$

$$= 5050$$

Forma giştî ya Komkirna peyhatya hejmarî

$$\sum_{n=0}^{l} a_n = s_n$$

$$s_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l$$

$$+\ s_n = l + (l-d)a + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

$$2s_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$$

$$2s_n = n \times (a+l)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

Forma giştî Ji bo komkirina n pêkhate ya **peyhatiya hejmarî:**

$$s_n = 2a + (n-1)d$$

Yan $$s_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

Mînak1:

Eger $a_n = 3 + (7n-1)$ peyhatiyeke hejmarî be, $\boldsymbol{s_{20}}$ bibîne.

Çareserî:

$n = 20\,, a = 3\,, l = 136$

$$s_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{20(3+136)}{2} = 10(139) = 1390$$

Mînak2:

Eger $\boldsymbol{a_n}$ peyhatiyeke hejmarî be, dema ku pêkhateya yekem $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ û $\boldsymbol{d} = \mathbf{3}$ be, $\boldsymbol{s_{10}}$ bibîne.

Çareserî:

$$s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$s_{10} = \frac{10}{2}[2(2) + (10-1)3] \quad = 155$$

Hînkirin:

1) Di peyhatiyên li jêr de hejmara neguhêr $\boldsymbol{d}$ bibîne û pênc pêkhateyên din ji her payhatiyekê re binivîse.
a) 1, 4,7,10,13,16 ……
b) -5, -3, -1,1,3 ……
c) -1, 10, 21,32,43,54 ……

2) Eger $\boldsymbol{a_1} = \mathbf{4}, \boldsymbol{d} = \mathbf{5}$ be, her pênc pêkhateyên destpêkê ji payhatiyê re bibîne.

3) Eger (2, 6, 14,18, 22 ……) peyhatiyeke hejmarî be, pêkhateyên (8) û (20) bibîne.

4) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}}$ peyhatiyek be, her pênc pêkhateyên destpêkê ji payhatiyê re bibîne û payhatiyê binivîse.
a) $a_{n+1} = 2a_n + 3 \quad , a_1 = 1$
b) $a_{n+1} = a_n \quad , a_1 = 11$
c) $a_{n+1} = 2a_n^2 + 3 \quad , a_1 = 2$

5) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}}\boldsymbol{:}\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ peyhatiyek be, tekez bike ku peyhatiyeke hejmarî ye.
a) $a_n = 2n + 3$ **b)** $a_n = 3n + 1$
c) $a_n = n^2 + 1$ **d)** $a_{n+1} = -2 + a_n , a_0 = 2$

6) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}}$ peyhatiyeke hejmarî be, $\boldsymbol{d}$ bingeha wê be.
a) $a_1 = 1$ û $a_{10} = 19 \quad d,\ a_{40}$ bibîne.
b) $a_1 = 2$ û $a_{100} = -97 \quad d,\ a_{20}$ bibîne.
c) $a_{11} = 12$ û $a_{30} = 50 \quad d,\ a_1$ bibîne.

7) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}}$ peyhatiyeke hejmarî be, $a_{10} = -12$ û $a_{20} = -32$ du pêkhateyên wê bin.
a) $\boldsymbol{d}$ û $\boldsymbol{a_1}$ bibîne.
b) $s = a_{10} + a_{20} + a_{30} + \cdots + a_{100}$ bibîne.

PEYHATIYA GEOMETRÎ

Sêgoşeyekî tîk û duhemkenar ji kaxezê çêke û bi meqes bike du sêgoşeyên tîk û duhemkenar. bi heman awayî sêgoşeyan parçe bike û her car hejmara sêgoşeyan bibîne.

$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 4$	$a_4 = 8$

a) em dikarin nirxê $\boldsymbol{a_5}$ li gorî $\boldsymbol{a_4}$ bibînin?
b) Nirxê $\boldsymbol{a_n}$ li gorî $\boldsymbol{a_{n-1}}$ bibîne.

Wek tê dîtin her pêkhateyek ji encama hevdana pêkhateya berî wê bi hejmara 2 re pêk tê, ango $\boldsymbol{a_5} = \mathbf{16}$.

Bi giştî: a_n =2(a_{n-1})

Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama hevdana pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê, jê re **peyhatiya geometrî** tê gotin.

Mînak: (1, 3, 9, 27, 81, …)

Têbînî:

Eger $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \boldsymbol{r}$, wê demê $\boldsymbol{a_n}$ peyhatiyeke geometrî ye.

Mînak:

tekez bike ku $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{2^n}$ peyhatiyeke geometrî ye.

(2,4,8,16,32, …, 2^n , ….) peyhatiyeke geometrî ye ji ber ku

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \text{ (const)}$$

Pêkhateya giştî ya peyhatiya geometrî

$a_1 = a \qquad\qquad = a \times r^0$

$a_2 = a \times \mathrm{r} \qquad\qquad = a \times r^1$

$a_3 = a \times \mathrm{r} \times \mathrm{r} \qquad\qquad = a \times r^2$

$a_4 = a \times \mathrm{r} \times \mathrm{r} \times \mathrm{r} \qquad\qquad = a \times r^3$

$a_n = a \times [\mathrm{r} \times \mathrm{r} \ldots (\mathrm{n}-1)] \quad = a \times r^{\mathrm{n}-1}$

$\boldsymbol{a_n = a \times r^{n-1}}$

Eger $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyeke geometrî be ku bingeha wê $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$ û pêkhateya wê ya yekem a be, li gorî wê, pêkhateya giştî:

$\boldsymbol{a_n = a.r^{n-1}}$

Lê eger pêkhateya wê ya yekem $\boldsymbol{a_p}$ be, pêkhateya giştî ev e:

$\boldsymbol{a_n = a_p.r^{n-p}}$

Forma giştî ya Komkirina peyhatiya geometrî

Eger a_n peyhatiyeke geometrî be, bi vî awayî tê nivîsandin

$a_n = a.r^{n-1}$

Li gorî vê, em dikarin komkirinê bi vî awayî bibînin:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$r \times s_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - r \times s_n = \mathrm{a} + 0 + 0 + \cdots - ar^n$$

$$s_n - r \times s_n = \mathrm{a} - ar^n$$

$$s_n(1-r) = \mathrm{a}(1 - r^n)$$

$$\boldsymbol{s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \; : r \neq 1}$$

Forma giştî ya komkirina $\boldsymbol{n}$ pêkhate ya peyhatiya geomitrî:

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \; : r \neq 1$$

Mînak:

Eger (2,4,8, …) Peyhatiyeke geometrî be, $\boldsymbol{S_6}$ bibîne.

Çareserî:

$$a = 2\,, r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2\,, n = 6$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_6 = \frac{2(1-(2)^6)}{1-2} = -2(1-46) = 90$$

Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama hevdana pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê, jê re **peyhatiya geometrî** tê gotin.

Mînak: (1, 3, 9, 27, 81, …)

Eger $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyeke geometrî be ku bingeha wê $\boldsymbol{r \neq 0}$ û pêkhateya wê ya yekem $\boldsymbol{a}$ be, li gorî wê, pêkhateya giştî:
$a_n = a.r^{n-1}$

Li eger pêkhateya wê ya yekem $\boldsymbol{a_p}$ be wê, pêkhateya giştî:
$a_n = a_p.r^{n-p}$

- Eger $\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{r}| < \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **tam kêmker** e.
- Eger $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **neguhêr** e.
- Eger $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{1}$ wê demê, peyhatî **tam zêdeker** e.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

Eger $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{1}$ wê demê, $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{na}$

Têbînî:

Eger $\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{r}| < \boldsymbol{1}$ be, wê demê peyhatiya geometrî tam kêmker e, û eger bê dawî be, di dema ku $\boldsymbol{n} \to +\infty$ li gorî wê, $\boldsymbol{r^n} \to \boldsymbol{0}$ wê demê, $\boldsymbol{S_n} \to \boldsymbol{S}$ û ji $\boldsymbol{S_\infty}$ re **komkirina bêdawî ji peyhatiyê** re tê gotin û sembola wê jî $\boldsymbol{S}$ ye:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

Mînak:

Peyhatiyeke geometrî ye, pêkhateya wê ya yekem 32 e û bingeha wê $\frac{1}{2}$ e,

a) $\boldsymbol{S_6}$ bibîne.
b) Tekez bike ku ev peyhatî tam kêmker e, û $\boldsymbol{S}$ bibîne.

Çareserî:

a) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$S_6 = \frac{32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = 32\times 2\left(1-\frac{1}{64}\right) = 64\left(\frac{63}{64}\right) = 63$$

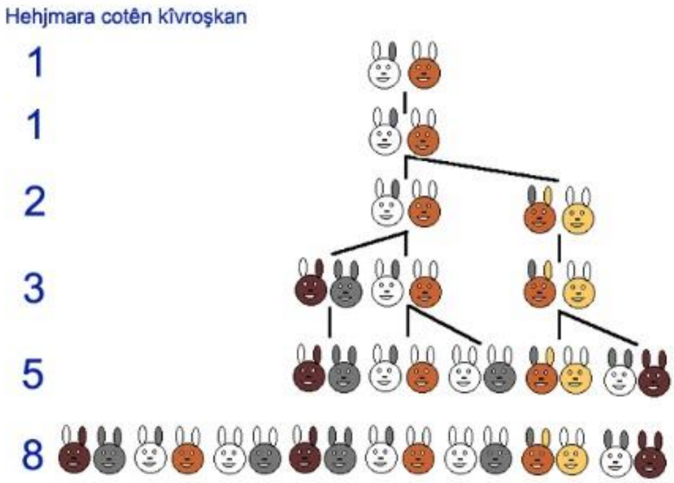
b) Peyhatî tam kêmker ji ber ku $\mathbf{r} = \frac{1}{2} < 1$

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 64$$

Peyhatiya Fibonacci

Peyhatiya Fîbonaçî (Fibonacci) peyhatiyeke vegerok e, zagona wê
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ :\ (n \geq 3)$
û li gorî ku $F_1 = F_2 = 1$

Her deh pêkhateyên destpêkê ev in:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …



Hînkirin:

1) $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyeke ku pêkhateya wê ya giştî $a_n = \frac{2n}{2n-1}$, tekez bike ku $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyeke tam kêmker e.

2) Eger $3, 5, 9, 17, \dots$ peyhatiyeke vegerok be, zagona vegerok û pêkhateya wê ya giştî bibîne.

3) Di peyhatiya Fîbonaçî de, tekez bike ku:
$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

DAWIYA PEYHATIYÊ

Tê zanîn ku dawiya peyhatiyan tune ye û bi piranî pêkhateyên wê yên destpêkê tên nivîsandin, lê ji bo nirxên mezin ên peyhatiyekê divê dawî were nîşankirin.

Dawiya peyhatiyê

Eger $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$ û $\mathbb{N} \geq p$ wê demê: $|a - \ell| \leq \mathcal{E}$ $\quad (\mathcal{E} > 0)$

Ji $\boldsymbol{\ell}$ re dawiya peyhatiyê tê gotin. $\ell \in \mathbb{R}$

Û bi vî awayî tê nivîsandin: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Eger $\boldsymbol{a_n}$ peyhatiyeke hejmarî be:

1) Eger her cîranê $(+\infty)$ ji bilî çend pêkhateyên destpêkê, hemû pêkhateyên peyhatiyê bigire nav xwe, wê demê: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
2) Eger her cîranê $(-\infty)$ ji bilî çend pêkhateyên destpêkê, hemû pêkhateyên peyhatiyê bigire nav xwe, wê demê: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Eger $\boldsymbol{a_n}$ peyhatiyeke be:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$: $a_n = c$ ($\boldsymbol{c}$ hejmareke rast e)
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ pêkhateya wê ya giştî $a_n = \frac{1}{n}$ ye.
3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ pêkhateya wê ya giştî $a_n = n$ ye.

Mînak:

Dawya peyhatiya $(\boldsymbol{a_n})$ bibîne.

(1) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Çareserî:

$$a_n = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{1+0} = 1$$

(2) $a_n = \frac{n^2-4n+5}{-7n^2+n+1}$

Çareserî:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}{-7+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1-0+0}{-7+0+0} = -\frac{1}{7}$$

(3) $a_n = \frac{n^2+6n}{4n-3}$

Çareserî:

$$a_n = \frac{n(n+6)}{n\left(4-\frac{3}{n}\right)} = \frac{(n+6)}{\left(4-\frac{3}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to+\infty}(n+6)}{\lim_{n\to+\infty}\left(4-\frac{3}{n}\right)} = +\infty$$

Mînak:

eger (a_n) peyhatiyek be, pêkhateya wê ya giştî $\boldsymbol{a_n = -8n + 1}$ be, $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n}$ bibîne.

Çareserî:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(-8n+1) = \lim_{n\to+\infty}(-8n) + \lim_{n\to+\infty}(1) = -\infty$$

Têbînî

Eger $\boldsymbol{a_n \geq 0}$ û $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n = k}$ be, wê demê: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt{k}$

Mînak:

eger (a_n) peyhatiyek be, pêkhateya wê ya giştî $a_n = \sqrt{n^2-6}$ be, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ bibîne.

Çareserî:

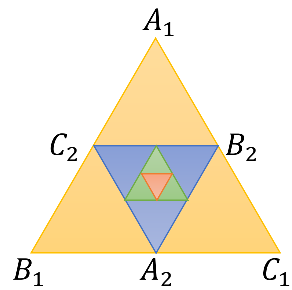
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-6} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} n^2-6} = +\infty$$

Mînak:

Sêgoşeyekî hemkenar e, dirêjahiya kenarî wî $\boldsymbol{\ell}$ ye, em xalên nîvekên her sê kenaran bigihînin hev, sêgoşeyekî nû tê bidestxistin ku ew jî hemkenar e, em xalên nîvekên her sê kenarên sêgoşeyê nû jî bigihînin hev, sêgoşeyekî sêyem tê bidestxistin ku ew jî hemkenar e, em bi vî awayî berdewam bikin…

a) Komkirina derdora hemû sêgoşeyan bibîne.

b) Komkirina rûberê hemû sêgoşeyan bibîne.



Çareserî:

Sêgoşeyê $\boldsymbol{A_1B_1C_1}$ derdora wê $\boldsymbol{3\ell}$ e, û rûberê wê $\frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$

Sêgoşeyê $\boldsymbol{A_2B_2C_2}$ derdora wê $\frac{3\ell}{2}$ ye, û rûberê wê $\frac{\sqrt{3}\,\ell^2}{16}$ ye.

Sêgoşeyê $\boldsymbol{A_3B_3C_3}$ derdora wê ….. e, û rûberê wê …..

Bi vî awayî du peyhatiyên geometrî yên bê dawî pêk tên.

Ya yekem: berdewamiya derdora sêgoşeyan e, pêkhateya yekem $\boldsymbol{3\ell}$ û bingeha wê $\frac{1}{2}$ e.

Ya duyem: berdewamiya rûberê sêgoşeyan e, pêkhateya yekem $\frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$ û bingeha wê $\frac{1}{4}$ e.

Li gorî zagona $\boldsymbol{S} = \frac{a}{1-r}$:

a) Komkirina derdora hemû sêgoşeyan $S_1 = \frac{3\ell}{1-\frac{1}{2}} = 6\ell$

b) Komkirina rûberê hemû sêgoşeyan $S_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}\ell^2}{3}$

Hînkirin:

1) Eger $(\boldsymbol{a_n})$ peyhatiyek be, pêkhateya wê ya giştî $\boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{2n+1}}{\boldsymbol{n}}$ be:

a) Her şeş pêkhateyên destpêkê bibîne.

b) Tekez bike ku $\boldsymbol{a_n}$ kêmker e.

c) $\lim\limits_{\boldsymbol{n \to +\infty}} \boldsymbol{a_n}$ bibîne.

2) Dawiya peyhatiyên li jêr bibîne.

a) $a_n = \frac{3n+1}{2n+5}$ **b)** $a_n = \sqrt{n^2 - 2n + 3}$

c) $a_n = \left(\frac{9n-2}{n}\right)^4$ **d)** $a_n = 7.2^{n-1}$

PIRSÊN BEŞA PÊNCEM

1) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ peyhatiyek be, li gorî rewşên li jêr, her peyhatî zêdeker e yan kêmker e?

a) $a_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$ b) $a_n = \frac{3n-2}{n+1}$

c) $a_n = \frac{n^2+1}{2n}, n \geq 1$ d) $(n-4)^2$

2) Hejmara neguhêr $\boldsymbol{r}$ û pênc pêkhateyên din ji her payhatiyê re binivîse.

a) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32},$ ……

b) -3, -9, -27, -81 ……

c) 2, 10, 50,250,1250 ……

3) Eger $\boldsymbol{a_1 = -6, r = 2}$ be, her şeş pêkhateyên destpêkê ji payhatiyê re bibîne.

4) Eger (1, 2, 4,8,16,32, ……) peyhatiyeke geometrî be, $\boldsymbol{a_{21}}$ bibîne.

5) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}} : \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ peyhatiyek be, li gorî rewşên li jêr tekez bike ku her peyhatî geometrî ye.

a) $a_n = \frac{2}{3^n}$ **b)** $a_n = 3^n + 3n$

c) $a_n = \frac{2}{5^{n+1}}$ **d)** $a_n = \frac{2n+5}{3}$

e) $a_n = 5^{n+3}$ **f)** $a_{n+1} = 4a_n, a_0 = 2$

g) $5a_{n+1} - 2a_n = 1, a_0 = -1$

6) Eger $(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ peyhatiyeke geometrî be û $\boldsymbol{r}$ bingeha wê be.

a) Eger $a_0 = 4$ û $r = 5$ be, a_n bibîne.

b) Eger $a_4 = 8$ û $r = 2$ be, a_2 û a_7 bibîne.

c) Eger $a_5 = 64$ û $a_7 = 256$ be, a_{10} bibîne.

7) Eger$(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n\geq 0}}$ peyhatiyeke geometrî be û $\boldsymbol{a_4 = 12}$ û $\boldsymbol{r = 3}$ be:

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ bibîne.

BEŞA ŞEŞEM: MATRÊKS

1) Matrêks
2) Vajiyê matrêksê

MATRÊKS

Dîlan xwest demjimêrên xwendina xwe ji pirtûkên ziman, bîrkarî û dîrokê re di heftiyekê de nas bike, ji bo vê yekê tabloya li jêr xêz kir û tê de demên xwendina her pirtûkekê li gorî rojan nivîsand.

	Yekşem	Duşem	Sêşem	Çarşem	pêncşem	În	şemî
Ziman	2	3	2	1	3	1	1
Bîrkarî	1	2	1	3	2	1	0
Dîrok	1	1	2	1	2	0	1

Ji bo hêsankirina nivîsandin û xwendina van agahiyên di tabloya li jor de, em hejmaran bi vî awayê li jêr rêz bikin:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ji koma hejmarên li jor re, **matrêks** tê gotin

Matrêks: Komeke hejmaran e, taybetiyên wan ên hevbeş hene, bi rêz û stûnan û bi awayê milkêşekî di navbera du kevanan de, tên komkirin.

Mînak:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 4} \\ 9 \quad -2 \quad 0 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \end{pmatrix}$$

Rêz

Stûn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Mînaka li jor ji sê rêz û sê stûnan pêk tê.

Ji bo her matrêksê du eşkêl hene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Eşkêla bingehîn

Eşkêla duyemîn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bi awayekî giştî matrêks bi vî awayî tê nivîsandin:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jê re **matrêksa** $\boldsymbol{A_{mn}}$ tê gotin ku ji $\boldsymbol{m}$ rêz û $\boldsymbol{n}$ stûn pêk tê.

Sembola wê ev e: $\boldsymbol{A_{mn}}$ û ji $\boldsymbol{m.n}$ re **pêpilk** tê gotin.

Cureyên matrêksan

1) **Matrêksa dam:**
Hejmara rêzan yeksanî hejmara stûnan e.

Mînak:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 5 & 2 \\ 1 & 11 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

2) **Matrêksa eşkêlî:**
Hemû endam sifir in ji bilî eşkêla bingehîn.

Mînak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Têbînî: Eşkêl tenê ji bo matrêksên dam hene.

3) **Matrêksa stûnî:**
Ji stûnekê pêk tê.
Mînak:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4) **Matrêksa rêzî:**
Ji rêzekê pêk tê.

Mînak:

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) **Matrêksa sifrî:**
endamên wê sifr in.

Mînak:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) **Matrêksa yekeyî:**
Eşkêla wê hejmara 1 û yên din sifr in û sembola wê $\boldsymbol{I_n}$ ye.

Mînak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) **Matrêksa yek endam:**
Ji endamekî pêk tê.
Mînak:
(5)

Yeksanîbûna matrêksan:

Eger $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}$ du matrêks bin û pêpilka wan heman be û endamên wan yên beramberî hev yeksan bin, wê demê her du matrêks yeksan in.

Mînak:

Li gorî ku $\begin{pmatrix} 2x+y & -1 \\ x-4y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, nirxên $\boldsymbol{x}$ û $\boldsymbol{y}$ bibîne.

Çareserî:

Li gorî yeksanîbûnê $2x + y = 5$ û $x - 4y = -2$

Em her du hevkêşeyan çareser bikin:

$2x + y = 5 \implies y = 5 - 2x$ (1)

$x - 4y = -2$ (2)

Li gorî (1) û (2)

$x - 4(5 - 2x) = -2$

$x = 2$ û $y = 1$

Karanînên li ser matrêksan:

1) **Komkirin û derxistin:**

Encama komkirina du matrêksên bi heman pêpilkê, matrêkseke bi heman pêpilkê ye û endamên wê encama komkirina endamên her du matrêksan ên beramberî hev in.

Mînak:

Encama komkirina her du matrêksên li jêr bibîne.

$$A_{3.3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad B_{3.3}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Çareserî:

$$A_{3.3} + B_{3.3} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 5 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3 & 5\\ 7 & 2 & 8\\ 6 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Komkirina matrêksan **hevguhêr** e

$$A_{m.n} + B_{m.n} = B_{m.n} + A_{m.n}$$

Encama derxistina du matrêksên bi heman pêpilkê, matrêkseke bi heman pêpilkê ye û endamên wê encama derxistina her endamekê bi endama beramberî wê re ye.

Mînak:

Eger $\boldsymbol{A_{3.3}}$, $\boldsymbol{B_{3.3}}$ du matrêks bin ku:

$$A_{3.3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\5 & 1 & 4\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} \;,\; B_{3.3}\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 4\\5 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Encama $\boldsymbol{A_{3.3} - B_{3.3}}$ û $\boldsymbol{B_{3.3} - A_{3.3}}$ bibîne.

Çareserî:

$$A_{3.3} - B_{3.3} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\5 & 1 & 4\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 4\\5 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\3 & 0 & 0\\-4 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$B_{3.3} - A_{3.3} = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 1 & 4\\5 & 2 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\5 & 1 & 4\\1 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\-3 & 0 & 0\\4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

derxistina matrêksan **nehevguhêr** e

$$A_{m.n} - B_{m.n} \neq B_{m.n} - A_{m.n}$$

2) Hevdan

Hevdana matrêksê bi hejmareke rast re:

Ji bo dîtina encamê, em her endamê matrêksê hevdanî hejmara rast dikin.

Mînak 1:

Encama hevdana matrêksa li jêr bi hejmara 5 re bibîne.

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -4\end{pmatrix}$$

Çareserî:

$$5.\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 5\\5 & -20\end{pmatrix}$$

Mînak 2:

Eger $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ matrêksek be, encama $\frac{1}{3}.A$ bibîne.

Çareserî:

$$\frac{1}{3}.A = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Hevdana du matrêksan

Mercê pêkanîna hevdana du matrêksan $\mathbf{A}$ û $\mathbf{B}$:

- **hejmara stûnên matrêksa yekem $\mathbf{A}$ yeksanî hejmara rêzên matrêksa duyem $\mathbf{B}$ be.**

Eger $\boldsymbol{A}$ matrêksek be bi $\boldsymbol{m.r}$ pêpilk û $\boldsymbol{B}$ matrêksek be bi $\boldsymbol{r.n}$ pêpilk, wê demê hevdan bi vî awayî ye:

$$\underset{m\times r}{\boldsymbol{A}} \; . \; \underset{r\times n}{\boldsymbol{B}} = \underset{m\times n}{\boldsymbol{C}}$$

Li gorî ku hejmara stûnên matrêksa $\boldsymbol{A}$ yeksanî hejmara rêzên matrêksa $\boldsymbol{B}$ ye**.**

Pêkanîna hevdanê: Destpêkê komkirina hevdana hejmarên di rêza yekem ya matrêksa yekem $\mathbf{A}$ bi hejmarên stûna yekem, duyem û sêyem ji matrêksa duyem $\mathbf{B}$, piştre komkirina hevdana hejmarên di rêza duyem ji matrêksa yekem $\mathbf{A}$ bi hejmarên stûna yekem, duyem û sêyem ji matrêksa duyem $\mathbf{B}$ pêk bînin.

Mînak:

Eger $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ û $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

Encama $\mathbf{A.B}$ bibîne.

Çareserî:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

Li gorî ku:

$c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31}$
$c_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32}$
$c_{13} = a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33}$
$c_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31}$
$c_{22} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32}$
$c_{23} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33}$

Mînak:

Eger $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ û $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Encama $\mathbf{A.B}$ bibîne.

Çareserî:

$$\mathrm{A.B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} (1\times2)+(2\times3)+(3\times1) & (1\times4)+(2\times5)+(3\times0) \\ (4\times2)+(5\times3)+(6\times1) & (4\times4)+(5\times5)+(6\times0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 29 & 5 \end{pmatrix}$$

Hevdana du matrêksan **nehevguhêr** e

$A_{m.n}.B_{m.n} \neq B_{m.n}.A_{m.n}$

VAJIYÊ MATRÊKSÊ

Eger $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ du matrêskên dam ji pêpilka $\boldsymbol{n}$ bin û $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$, li gorî vê, $\boldsymbol{A}$ vajiyê $\boldsymbol{B}$ ye, yan jî $\boldsymbol{B}$ vajiyê $\boldsymbol{A}$ ye, ango her du matrêks vajiyê hev in.

Sembola vajîbûnê ev e: $A^{-1} = B$ û $B^{-1} = A$

Mînak:

Tekez bike ku her du matrêksên li jêr vajiyê hev in.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Çareserî:

$$\mathrm{A.B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wek tê dîtin, encam matrêksa yekeyî ye, li gorî vê her du matrêks vajiyê hev in.

Diyarkera matrêksê:

Eger $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrêksek be:

Ji hejmara $\boldsymbol{ad - bc}$ re diyarkera matrêksê tê gotin.

Diyarkera matrêksê bi vî awayî tê nivîsandin:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ û sembola wê jî $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ ye.

Vajiyê matrêksa dam

Eger $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ matrêksek be, ji bo dîtina vajiyê wê, em destpêkê diyarkera wê bibînin:

a) Eger $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0}$ be, wê demê vajiyê $\mathbf{A}$ ev e:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b) Lê eger $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$ wê demê vajiyê $\mathbf{A}$ nîne û jê re matrêksa tekane tê gotin.

Mînak 1:

Eger $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ matrêksek be, vajiyê wê heye yan na?

Çareserî:

$\det(A) = ad - bc = -3 + 6 = +3$ li gorî vê, vajiyê wê heye:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mînak 2:

Eger $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ matrêksek be, vajiyê wê heye yan na?

Çareserî:

$\det(A) = ad - bc = -12 + 12 = 0$ li gorî vê, vajiyê wê nîne.

Sûdgirtina ji matrêksan:

Gelek sûd ji matrêksan di jiyanê de tên girtin bi taybetî di kargehan de yên ku çend berheman bi hev re çêdikin ji bo naskirina girûpên berheman û buhayê wan. Matrêks di elektrîkê de, di mîkanîkê de jî tê bikaranîn. Di şîfrekirina nameyan de jî tê bikaranîn ji bo ewlehiya agahiyan.

Em dikarin nameyeke şîfrekirî binivîsin û piştre jî vekin ji bo were xwendin. Destpêkê em tîpan bi hejmaran re rêz bikin û sifir ji bo valahiya di navbera peyvan de nîşan bikin, divê matrêksa şîfrekirinê $\boldsymbol{P}$ û ji bo vekirinê jî $\boldsymbol{P}^{-1}$ hebe ku bi matrêksên ji hejmarên beramberî tîpan û li gorî peyvan çêdibin, tên lihevdan.

	A	B	C	Ç	D	E	Ê	F	G	H
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	Î	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
S	Ş	T	U	Û	V	W	X	Y	Z	
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	

Mînak:

Peyama ku em bişînin: **"ROJ BAŞ"** û matrêksa şîfrekirinê $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ û ji bo vekirinê jî $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Em peyamê binivîsin:

$$\begin{pmatrix} R \\ O \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J \\ \ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Ş \\ \ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Peyam bû bi vî awayî:

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Em niha bi P re hevdanê pêk bînin ta were şîfrekirin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Peyama şîfrekirî bû bi vî awayî:

$$\begin{pmatrix} 39 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vekirina peyamê:

Ji bo vekirina peyamê, em hevdana peyamê bi $\boldsymbol{P^{-1}}$ pêk bînin:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 39 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Peyama vekirî bi vî awayî çêdibe, em tîpan li gorî rêzkirinê beramberî wan binivîsin:

$$\binom{21}{18} \to \binom{R}{O} \quad , \quad \binom{13}{0} \to \binom{J}{} \quad , \quad \binom{2}{1} \to \binom{B}{A} \quad , \quad \binom{23}{0} \to \binom{Ş}{}$$

R	O	J		B	A	Ş	

Careserkirina hevkêşeya matrêksî

Ji bo çareserkirina hevkêşeya matrêksî ya li jêr:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\boldsymbol{X}$ matrêkseke ji pêpilka 2×1 ye.)

Destpêkê em matrêksa $\boldsymbol{X}$ bi awayê sembolî binivîsin: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$

Piştre em hevdanê pêk bînin:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a + 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ li gorî yeksanîbûnê em her du hevkêşeyan binivîsin:

$\left.\begin{matrix} 2a + 3b = 5 \\ a + 4b = 0 \end{matrix}\right\} \to \ a = 4, \ b = \ -1$ li gorî vê: $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bi awayekî din:

Eger $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ û $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ be, ji bo çareseriya hevkêşeya $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$**,** em dikarin bi sûdgirtina ji vajiyê matrêksa $\boldsymbol{A}$ (eger hebe) hevkêşeyê çareser bikin: $A.X = B \to X = A^{-1}.B$

Destpêkê em $\boldsymbol{det\ A}$ bibînin:

$$det\ A = ad - bc = 8 - 3 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Em hevdanê pêk bînin:

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

PIRSÊN BEŞA ŞEŞEM

1) Eger her du matrêksên $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ û $B = \begin{pmatrix} x^2 + 2x & 4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ yeksanî hev bin, nirxê $\boldsymbol{x}$ bibîne.

2) Eger her du matrêksên $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & y-2 \end{pmatrix}$ û $B = \begin{pmatrix} 3 & x+1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ yeksanî hev bin, nirxê $\boldsymbol{x}$ û $\boldsymbol{y}$ binîne.

3) Eger $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ û $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ du matrêks bin, $2A + 2B$, $A + 3B$ binîne.

4) Eger $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ û $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ du matrêks bin, $A^2, B^2, A.B, A - B , (A - B)^2$ binîne.

5) Eger $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ û $\mathbf{C}$ sê matrêks bin.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $\mathbf{A.B}$, $\mathbf{B.C}$ binîne.

b) Tekez bike ku $(A.B).C = A.(B.C)$

BEŞA HEFTEM: DIBETÎ

1) Dibetî
2) Fezaya dibetiya bi dawî û yeksan
3) Dibetiya mercî
4) Şemaya bi şax
5) Dibetiyên serbixwe

DIBETÎ

Em hin têgehan nas bikin

Tecrube: her ceribandineke ku çêbûna wê gengaz e, yan jî bûyereke xwezayî ye ku encamên wê tên naskirin.

Encamên tecrubeyê: bi tevahî encamên ku ji ceribandinê tên bidestxistin, sembola wê $\boldsymbol{\Omega}$ (omêga) ye.

Bûyer: binkomika encamên tecrubeyê Ω ye, sembola wê jî yek ji tîpên **A**, **B**, **C**, **D**, … ye.

Mînak:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eger A bûyera ku hejmareke tekane li jor be:

$A = \{2, 3, 5\}$

û eger B bûyera ku hejmareke cot be:

$B = \{2, 4, 6\}$

Em hin bûyeran nas bikin:

- Bûyera tekez: $\boldsymbol{\Omega}$
- Bûyera negengaz: $\boldsymbol{\phi}$
- Bûyera sade: bûyera bi endamekî.
- Bûyerên dijber: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ dijber in → $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}$
- Bûyerên hevtemamker: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ hevtemamker in → $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\phi}$ û $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega}$, di heman demê de: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega} \backslash \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$

Mînak:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê bûyerên li jêr binivîse

1) Diyarbûna hejmareke ji 5 mezintir
2) Diyarbûna hejmareke ji 1 biçûktir
3) Diyarbûna hejmareke ji 7 biçûktir

Çareserî

1) $A = \{6\}$ (bûyereke sade ye)
2) $B = \{\ \} = \emptyset$ (bûyereke negengaz e)
3) $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (bûyereke tekez e)

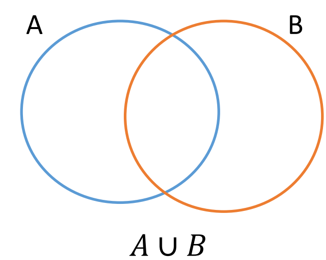
Çêbûna bûyerekê:

Di tecrubeyekê de encamek tê bidestxistin sembola wê $\boldsymbol{x}$ e, eger:

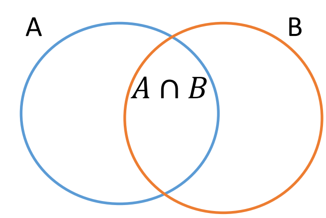
Bûyera $\boldsymbol{A}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$

Bûyera $\boldsymbol{A}$ pêk nehatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$

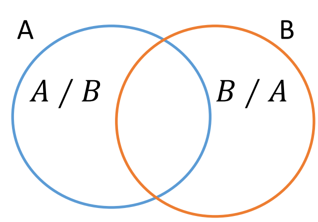
Karanînên li ser bûyeran



a) yekgirtina du bûyeran:
Bûyerên endamên $\boldsymbol{A}$ yan jî $\boldsymbol{B}$, endamên hevgirtina her du bûyerên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ ne, sembola wê $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ yan jî $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ye



b) qetandina du bûyeran:
Bûyerên endamên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, endamên qetandina her du bûyerên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ ne.
$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ye



c) ferqa du bûyeran:
Ferqa $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, bûyerên ku endamên $\boldsymbol{A}$ ne, lê ne endamên $\boldsymbol{B}$ ne.
Ferqa $\boldsymbol{B}$ û $\boldsymbol{A}$, bûyerên ku endamên $\boldsymbol{B}$ ne, lê ne endamên $\boldsymbol{A}$ ne.
$\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}$ ye.
$\boldsymbol{B} \backslash \boldsymbol{A}$ pêk hatiye $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ û $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$ ye

Mînak:

Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de û careke tenê, $\boldsymbol{A}$ bûyera ku komkirina her du hejmarên li ser berikan 8 be, $\boldsymbol{B}$ bûyera ku her du hejmarên li ser berikan yeksan bin, li ser tabloya li jêr bihizire

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Bûyerên A, B, A', $A\,/\,B$, $A \cup B$, $A \cap B$ bibîne.

Fonksiyona dibetiyê

Eger $\boldsymbol{\Omega}$ encamên tecrubeyeke diyarkirî be, wê demê fonksiyona $\boldsymbol{P}$ ya ku ji $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega})$ dest pê dike û bi $[0, 1]$ bi dawî dibe, jê re fonksiyona dibetiyê tê gotin, lê du mercên wê hene:

1) $P(\Omega) = 1$
2) Eger $A \cap B = \emptyset$, wê demê $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   û ji $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}),\ \boldsymbol{P})$ re **fezaya dibetiya bi dawî** tê gotin.

Teorî 1:

Di fezaya bi dawî $(\Omega,\ P(\Omega),\ P)$ de $P(\emptyset) = 0$

Tekezkirin:

Her du bûyerên $\boldsymbol{A}$ û $\emptyset$ hevtemam in:

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Teorî 2:

Di fezaya bi dawî $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}),\ \boldsymbol{P})$ de eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ du bûyerên hevtemam bin: $P(A') = 1 - P(A)$

Tekezkirin:

Her du bûyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ hevtemam in:

$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \qquad : A \cup A' = \Omega$

$P(\Omega) = P(A) + P(A') \qquad : P(\Omega) = 1$

$1 = P(A) + P(A')$

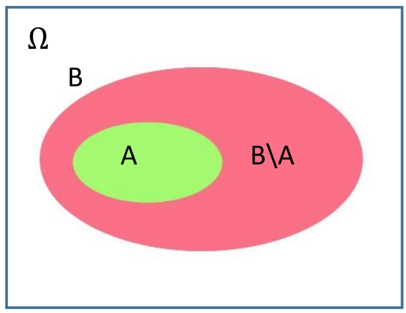
$P(A') = 1 - P(A)$

Teorî 3:

Di fezaya bi dawî ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{P}$) de eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyer bin:

$A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

Tekezkirin:



Her du bûyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ hevtemam in:

Û $A \cup (B\backslash A) = B$

$P(B) = P(A \cup (B\backslash A))$

$P(B) = P(A) + P(B\backslash A)$

$P(B) - P(A) = P(B\backslash A))$ lê $P(B\backslash A) \geq 0$

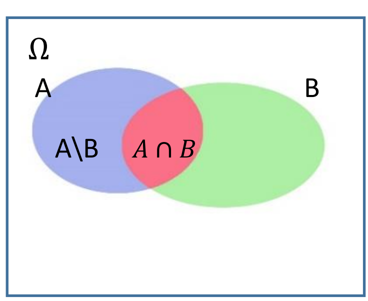
$\Longrightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \ \Longrightarrow P(B) \geq P(A)$

Teorî 4:

Di fezaya bi dawî ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{P}$) de eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyer bin

$P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Tekezkirin:



Her du bûyerên $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ hevtemam in:

$A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$

$P(A) = P[(A\backslash B) \cup (A \cap B)]$

$P(A) = P(A\backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Têbînî: $\mathrm{P}(A \backslash B) = P(A \cap B')$

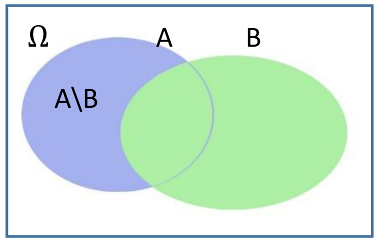
Teorî 5:

Di fezaya bi dawî ($\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{P}$) de eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyer bin

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Tekezkirin:

Her du bûyerên $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{B}$ hevtemam in:



$A \cup B = (A \backslash B) \cup B$

$P(A \cup B) = P[(A \backslash B) \cup B]$

$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bi kurtasî

Di fezaya dibetiya bi dawî de (Ω, $P(\Omega)$, P):

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Têbînî:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Mînak:

Di dibetiya (Ω, $P(\Omega)$, P) de: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Daxwazên li jêr bibîne.

1) $P(A\backslash B)$, $P(A \cup B)$
2) $P(A' \cup B')$
3) Dibetiya pêkhatina yek ji her du bûyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$

Çareserî:

1) $P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

2) $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3) Dibetiya pêkhatina yek ji her du bûyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ev e:

$W = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

$P(W) = P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$P(W) = P(A\backslash B) + P(B\backslash A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{6} = \frac{1}{4}$

Hînkirin:

- Eger $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$, $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}}$, $\boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}$ be, yên li jêr bibîne.

a) $P(A')$, $P(B')$

b) $P(A \backslash B)$

c) $P(A \cup B)$

d) $P(A \cap B')$

e) $P(B' \cap A)$

f) $P(A \cap B)'$

FEZAYA DIBETIYA BI DAWÎ Û YEKSAN

Di fezaya dibetiya bi dawî de $(\Omega,\ P(\Omega),\ P)$:

Eger $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots\ a_n\}$ û $\mathrm{P}(a_1) = \mathrm{P}(a_2) = \cdots = \mathrm{P}(a_n)$ ango hemû bûyerên seretayî yeksanî hev bin. Wê demê jê re **fezaya dibetiya bi dawî û yeksan** tê gotin.

Encam:

a) Eger $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots\ a_n\}$ be, wê demê:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(a_1) + \mathrm{P}(a_2) + \cdots + \mathrm{P}(a_n) = 1 \\ \mathrm{P}(a_1) = \mathrm{P}(a_2) = \cdots = \mathrm{P}(a_n) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{P}(a_1) = \mathrm{P}(a_2) = \cdots = \mathrm{P}(a_n) = \frac{1}{n}$$

b) Eger $A = \{b_1, b_2, \ldots\ b_n\}$ be, wê demê:

$$\begin{cases} \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(b_1) + \mathrm{P}(b_2) + \cdots + \mathrm{P}(b_m) = 1 \\ \mathrm{P}(b_1) = \mathrm{P}(b_2) = \cdots = \mathrm{P}(b_m) = \frac{1}{n} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{P}(A) = m.\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

c) Eger $\mathrm{n}(A) = m$, $\mathrm{n}(\Omega) = n$ be, wê demê:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

Bi awayekî giştî $\mathbf{P(A)} = \dfrac{\boldsymbol{hejmara\ ancamên\ bûyerê}}{\boldsymbol{hejmara\ encamên\ tecrubayê}}$

Bi awayekî din $\mathbf{P(A)} = \dfrac{\boldsymbol{hejmara\ awayên\ pêkhatina\ bûyera\ A}}{\boldsymbol{hejmara\ awayên\ pêkhatina\ bûyera\ \Omega}} = \dfrac{\boldsymbol{n(A)}}{\boldsymbol{n(\Omega)}}$

Têbînî:

1) Di kişandina zêdetirî endamekî de, sê rewş hene: **a)** kişandina bi hev re, di vê rewşê de em **levkirinê** pêk tînin. **b)** kişandina li pey hev bê vegerandin, em ê endamekî bikişînin û wî endamî dûr bixin piştre endamekî din bikişînin û bi vî awayî berdewam bikin. Di vê rewşê de em **rêzkirinê** pêk tînin. **c)** kişandina li pey hev bi vegerandin, em ê endamekî bikişînin û wî endamî vegerînin piştre endamekî din bikişînin û bi vî awayî berdewam bikin. Di vê rewşê de em **riya bingehîn a jimartinê** pêk tînin.

2) Eger rêzkirin ne pêwîst be di kişandina li pey hev bê vegerandin de, dibetî tê dîtin wek ku kişandin bi hev re be.

3) Di kişandina li pey hev bi vegerandinê de, dibetiya her endamî heman e, ango tu girêdana dibetiyê bi rêzkirinê re nîne.

Mînak:

Di sindoqekê de heft kart hene bi van hejmaran nîşankirî ne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 em sê kartan bi hev re bikişînin, dibetiya van bûyeran bibîne.

a) bûyera bidestxistina sê kartên pey hev bi vegerandin.
b) bûyera bidestxistina sê kartên pey hev bê vegerandin.
c) bûyera bidestxistina sê kartên bi hev re.

Çareserî:

a) em karta yekem bi heft awayan dikişînin û karta duyem jî bi heft awayan dikişînin û ya sêyem jî bi heft awayan dikişînin (li gorî riya bingehîn a jimartinê) $\boldsymbol{n}(\Omega) = 7.7.7 = 343$

b) em karta yekem bi heft awayan dikişînin û karta duyem jî bi şeş awayan dikişînin û ya sêyem jî bi pênc awayan dikişînin (li gorî riya bingehîn a jimartinê)
$\boldsymbol{n}(\Omega) = \mathrm{p}(7,3) = 7.6.5 = 210$

c) em binkomikeke ji sê endaman pêk tê ji komika {1, 2, …,7} dikişînin.
$$\boldsymbol{n}(\Omega) = \mathrm{C}(7,3) = \frac{\mathrm{P}(7,3)}{P_3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

Mînak:

Di sindoqekê de 3 gokên spî, 4 gokên sor û 5 gokên zer hene, me du ji wan kişandin.

- ❖ $\boldsymbol{A}$ bûyera bidestxistina du gokên sor.
- ❖ $\boldsymbol{B}$ bûyera bidestxistina du gokên ji heman rengî.
- ❖ $\boldsymbol{C}$ bûyera bidestxistina herî kêm gokeke sor.

a) Eger bi hev re bên kişandin, dibetiya dîtina bûyerên $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ bibîne.

b) Eger li pey hev bên kişandin bê vegerandin, dîtina bûyerên $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ bibîne.

c) Eger li pey hev bên kişandin bi vegerandin, dîtina bûyerên $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ bibîne.

Çareserî:

a) $\boldsymbol{n}(\Omega) = \mathrm{C}(12{,}2) = 66$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}(4{,}2)}{\mathrm{C}(12{,}2)} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

$$\mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{n}(B)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}(3{,}2) + \mathrm{C}(4{,}2) + \mathrm{C}(5{,}2)}{\mathrm{C}(12{,}2)} = \frac{19}{66}$$

eger $\boldsymbol{C}'$ bûyera bidestxistina du gokên ku sor di nav de nebin:

$\mathrm{P}(C') = \frac{\mathrm{n}(C')}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{\mathrm{C}(8{,}2)}{\mathrm{C}(12{,}2)} = \frac{28}{66}$ li gorî vê

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{28}{66} = \frac{38}{66}$$

Hûn dikarin **b)** û **c)** bi alîkariya mamoste çareser bikin.

Hînkirin:

1) Di sindoqekê de heşt kart hene bi van hejmaran nîşankirî ne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, em du kartan bi hev re bikişînin, dibetiya van bûyeran bibîne.

- **a)** A bûyera bidestxistina du kartên bi heman hejmarî.
- **b)** B bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên wan cot be.
- **c)** C bûyera bidestxistina karteke ku hejmara 7 li ser be.
- **d)** D bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên li ser wan ji 8 mezintir be.
- **e)** E bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên li ser wan ji 8 mezintir be yan her du hejmar tekane bin.

2) Di pakêtekê de heft kart hene bi van hejmaran nîşankirî ne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, em sê kartan li pey hev bê vegerandin bikişînin, dibetiya van bûyeran bibîne.

- **a)** bûyera bidestxistina karteke bi heman hejmarî.
- **b)** bûyera bidestxistina du kartên ku komkirina hejmarên wan cot be.
- **c)** Bûyera bidestxistina karteke ku hejmara 7 li ser be.

3) Di sindoqekê de 8 gokên sor, 3 gokên spî û 9 gokên kesk hene, me sê ji wan bi hev re kişand.
dibetiya van bûyeran bibîne.

- **a)** her sê gok sor in.
- **b)** du gok sor û yek spî.
- **c)** gokek ji her rengekî.
- **d)** Gok bi rêzê hetin kişandin, sor, spî û kesk.
- **e)** Bidestxistina gokeke ku spî di nav de nebe.
- **f)** Herî kêm, gokek spî heye.

DIBETIYA MERCÎ

Di tecrubeyekê de ku du bûyerên wê hene $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$, eger bandora pêkhatina bûyera $\boldsymbol{A}$ li ser bûyera $\boldsymbol{B}$ hebe, wê demê jê re **dibetiya mercî** tê gotin, sembola wê $\boldsymbol{P_B(A)}$ ye û bi vî awayî tê nivîsandin:

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (dibetiya bûyera $\boldsymbol{A}$ li gorî pêkhatina $\boldsymbol{B}$) tê xwendin.

Mînak:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eger $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ be.

Dibetiya bûyera $\boldsymbol{A}$ li gorî pêkhatina B bibîne.

Çareserî:

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

1) Eger $\boldsymbol{P_B}$ fonksiyona dibetiyê be, wê demê hemû taybetiyên fonksiyona dibetiyê pêk tên:
a) $P_B(A') = 1 - P_B(A)$
b) $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2) - P_B(A_1 \cap A_2)$

2) Eger $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ du bûyer bin ji fezaya dibetiya bi dawî $(\Omega,\ P(\Omega),\ P)$,û $P(B) \neq 0$ be li gorî wê:
a) eger $A \cap B = \emptyset$ be, wê demê $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)}$ =0
b) eger $B \subseteq A$ be, wê demê $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

$P(A \cap B) = P(B).P_B(A)$, $P(B) \neq 0$
$P(A \cap B) = P(A).P_A(B)$, $P(A) \neq 0$
Ji vê re **rêgeza dibetiya hevgirtî ji du bûyeran** re tê gotin

Be awayekî giştî:

Eger $A, B, C \in P(\Omega)$ û $P(A) \neq 0, P(A \cap B) \neq 0$ wê demê:

$$P(A \cap B \cap C) = P\big((A \cap B) \cap C\big) = P(A \cap B). P_{A \cap B}(C)$$

$$= P(A). P_A(B). P_{A \cap B}(C)$$

Ji vê re **rêgeza dibetiya hevgirtî ji sê bûyeran re** tê gotin

- di fezaya dibetiya bi dawî û yeksan de:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Mînak 1:

Di tecrubeya avêtina berika zarê de û careke tenê:

Encamên tecrubeyê: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eger $\boldsymbol{A_1}$ bûyera ku hejmara 2 li jor be.

Eger $\boldsymbol{A_2}$ bûyera ku hejmarek ji 5 kêmtir be.

û eger $\boldsymbol{B}$ bûyera ku hejmareke cot be:

1) $P_B(A_1)$ bibîne.
2) $P_B(A_2)$ bibîne.

Çareserî:

$\mathrm{B} = \{ 2, 4, 6\} \Rightarrow n(B) = 3$

1) $\begin{cases} A_1 = \{ 2\} \Rightarrow n(A_1) = 1 \\ A_1 \cap B = \{ 2\} \Rightarrow n(A_1 \cap B) = 1 \end{cases} \Rightarrow P_B(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A_1 \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$

2) $\begin{cases} A_2 = \{ 1,2,3,4\} \Rightarrow n(A_2) = 4 \\ A_2 \cap B = \{ 2,4\} \Rightarrow n(A_2 \cap B) = 2 \end{cases} \Rightarrow P_B(A_2) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A_2 \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$

Mînak 2:

Di Sindoqekê de pênc gokên sor hene û her yek ji wan bi hejmarên 1,1,1,1,2 nîşankirî ne û sê gokên şîn bi hejmarên 1,1,2 nîşankirî hene, em ji Sindoqê du gokan li pey hev bikişînin bê vegerandin,

Dibetiya van bûyeran bibîne.

1) komkirina hejmara li ser her du gokan yeksanî 2 be.
2) du gokên sor bin û komkirna hejmara li ser her duyan yeksanî 2 be.
3) eger bê zanîn her du gok sor in, Dibetiya komkirna hijmara her duyan yeksanî 2 be bibîne

Çareserî:

1) **A**: Bûyera kişandina du gokan, komkirna hejmara her duyan yeksanî 2 be.
$$P(A) = \frac{c(6,2).c(2,0)}{c(8,2)} = \frac{15}{28}$$
2) **B**: Bûyera kişandina du gokên sor be, em bûyera **B** bibînin
$$P(A) = \frac{\mathrm{n}(A)}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{c(4,2)}{c(8,2)} = \frac{3}{14}$$
3) R: Bûyera du gokên sor be, em bûyera **A** bibînin.
$$P_R(A) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)} = \frac{n(R \cap B)}{n(R)} = \frac{c(4,2)}{c(5,2)} = \frac{3}{5}$$

Hînkirin:

1) Eger $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{27}{35}, P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ yên li jêr bibîne.
$P(A \cap B)$, $P_B(A)$, $P_A(B)$

2) Eger 7 kartên wek hev û bi hejmarên $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nîşankirî bin. Em sê kartan li pey hev bê vegerandin bikişînin.
a) Dibetiya kişandina karta bi hejmara 6 bibîne.
b) Eger bê zanîn ku komkirina her sê hejmarên kertên hatine kişandin kit be, Dibetiya ku karta bi hejmara 2 di nav wan de be bibîne?

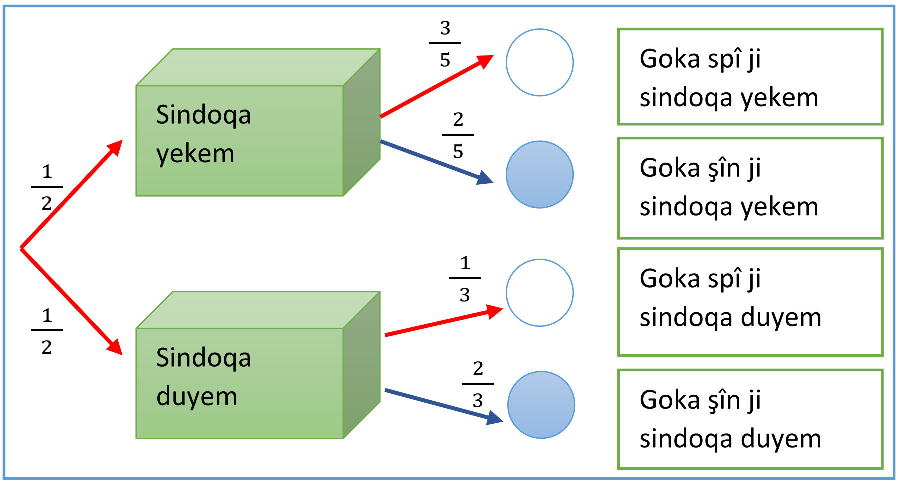
ŞEMAYA BI ŞAX:

Mînak:

Du sindoq hene di ya yekem de 5 gok (3 spî û 2 şîn) di ya duyem de 3 gok (1 spî û 2 şîn) hene, me ji sindoqekê ji wan gokek kişand, dibetiya ku gok spî be bibîne.

Çareserî:

Em li ser şemaya bi şax ya li jêr bihizirin.



Eger bûyera bidestxistina goka spî $\boldsymbol{W}$ be, li gorî tîrên sor:

$$P(W) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{14}{30}$$

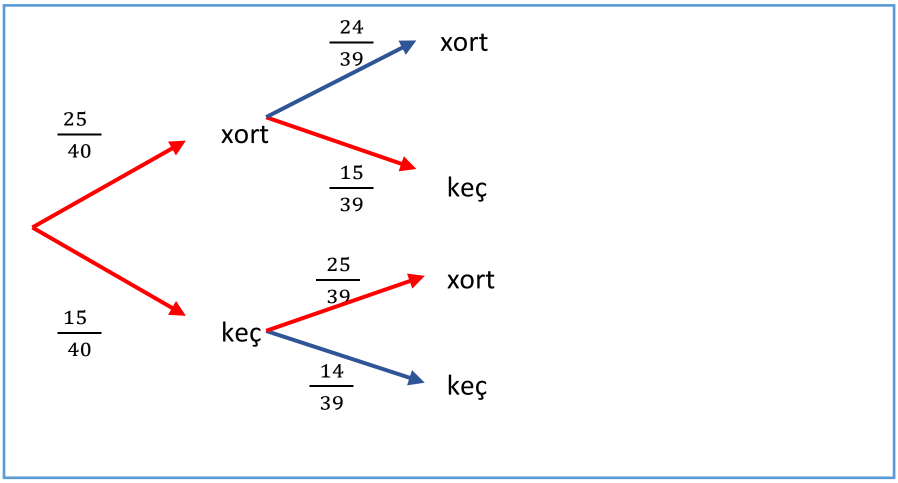
Mînak:

Di refekê de 25 xort û 15 keç hene, di waneya Îngilîzî de tê xwestin ku du kes derkevin bi hev re biaxivin,

a) Şemaya bi şax jê re çêke.
b) Dibetiya ku yek ji wan keç be û yê din jî xort be bibîne.

Çareserî:

a)



b) Eger A bûyera ku her du kesên axaftinê dikin yek ji wan keç be û yê din xort be.

$$P(A) = \left(\frac{25}{40} \times \frac{15}{39}\right) + \left(\frac{15}{40} \times \frac{25}{39}\right) = \frac{25}{104} + \frac{25}{104} = \frac{25}{52}$$

Hînkirin:

Di kergeheke çêkirina gilopan de sê mekîne hene, ya yekem %20, ya duyem %30, û ya sêyem jî %50 ji gilopên fabrîqayê bi giştî çêdikin, ji mekîneya yekem %1, ji ya duyem %4 û ji ya sêyem jî %7 xerabe derdikevin.

Eger ji berhemên fabrîqayê bi giştî em gilopekê bikişînin:

a) Şemaya bi şax jê re çêke.
b) Dibetiya ku gilopa me kişandî xerabe be, bibîne.
c) Eger me zanîba ku gilopa hatî kişandin xerabe ye; dibetiya ku ev gilop ji berhemên mekîneya yekem be bibîne.

DIBETIYÊN SERBIXWE

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P(\Omega)}, \boldsymbol{P})$, eger $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$ wê demê ji her du bûyerên $\boldsymbol{A, B}$ re **bûyerên serbixwe** tê gotin

Mînak:

Di tecrubeya avêtina diravekî kanzayî de sê caran, $\boldsymbol{A}$ bûyera diyarbûna wêne û nivîsê ye, $\boldsymbol{B}$ bûyera diyarbûna herî zêde nivîsek. Tekez bike ku her du bûyerên $\boldsymbol{A, B}$ serbixwe ne.

Çareserî:

$$\boldsymbol{\Omega} = \{(W,W,W),(N,W,W),(W,N,W),(W,W,N),$$
$$(N,W,N),(W,N,N),(N,N,W),(N,N,N)\}$$

$$\mathbf{A} = \{(N,W,W),(W,N,W),(W,W,N),(N,W,N),(W,N,N),(N,N,W)\}$$

$$\mathbf{B} = \{(W,W,W),(N,W,W),(W,N,W),(W,W,N)\}$$

$$\mathrm{n}(\Omega) = 8\ ,\ \ \mathrm{n}(\mathrm{A}) = 6\ ,\ \mathrm{n}(\mathrm{B}) = 4\ ,\ \mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 3$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad , \quad \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{3}{8}$$

Bi hevrûkirinê tê dîtin ku $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$

Li gorî vê her du bûyer serbixwe ne.

Têbînî:

Di tecrubeya avêtina nîşanekê, diravên kanzayî, berika zarê û kişandina bi vegerandin de bêhtirî carekê li pey hev, dibetî serbixwe ne.

Teorî

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P(\Omega)}, \boldsymbol{P})$, eger $\boldsymbol{A, B}$ du bûyer bin, li gorî ku $\mathbf{P}(\boldsymbol{B}) \neq \mathbf{0}$, mercê pêkanîna her du bûyerên serbixwe $\boldsymbol{A, B}$ ev e: $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).\mathrm{P}(\mathrm{B})$

Teorî

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$, eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyerên serbixwe bin, Wê demê A, B' serbixwe ne.

Tekezkirin:

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) \qquad : A, B$ serbixwe ne

$$= P(A) - P(A).P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$

Li gorî vê, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}'$ serbixwe ne.

Encam:

Di fezaya dibetiyê de $(\boldsymbol{\Omega},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{P})$:

1) Eger A, B du bûyerên serbixwe bin, Wê demê A', B serbixwe ne.
2) Eger A, B du bûyerên serbixwe bin, Wê demê A', B' serbixwe ne.

Sê bûyerên serbixwe

Di fezaya dibetiyê de $(\Omega,\ P(\Omega), P)$ sê bûyer hene A, B, C

Eger bûyerên A, B, C her du bi du bi hev re serbixwe bin, wê demê her sê bûyer serbixwe ne.

$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = P(A).P(B).P(C)$

Mînak:

Di tecrubeya avêtina du berikên zarê de li pey hev û careke tenê, $\boldsymbol{A}$ bûyera ku hejmara li ser berika yekem 2 be, $\boldsymbol{B}$ bûyera ku komkirina hejmarên li ser her du berikan 7 be, $\boldsymbol{C}$ bûyera ku her du hejmarên li ser her du berikan cot bin.

a) Tekez bike ku $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ serbixwe ne.
b) Tekez bike ku $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ serbixwe ne.

Çareserî:

a)

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,5)\} \Longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Longrightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(5,2)\} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{1}{36} \\ P(A).P(B) = \frac{1}{36} \end{cases} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B) \quad A, B \text{ serbixwe ne.}$$

b)

$$C = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$\Longrightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$A\{(2,2)\} \Longrightarrow P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{36}$$

$$\begin{cases} P(A \cap C) = \frac{1}{4} \\ P(A).P(C) = \frac{1}{36} \end{cases} \Longrightarrow P(A \cap C) \neq P(A).P(C) \quad A, C \text{ ne serbixwe ne.}$$

Hînkirin:

Eger $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ du bûyer bin di fezaya dibetiyê $\boldsymbol{S}$ de:
$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{S}) = \mathbf{36}$; $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{9}$; $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{4}$ û $\boldsymbol{n}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{24}$ be.

- **a)** $\boldsymbol{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ bibîne.
- **b)** $\boldsymbol{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$ bibîne.
- **c)** Tekez bike ku $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ serbixwe ne.

BEŞA HEŞTEM: HEJMARÊN KOMPLÊKS

HEJMARÊN KOMPLÊKS

HEJMARÊN KOMPLÊKS

Li ser hevkêşeyên li jêr bihizire, çareseriya wan di $\mathbb{R}$ de heye yan na?

a) $x^2 + x - 4 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 + x + 7 = 0$

Wek tê dîtin çareseriya hevkêşeyên (a) û (b) di $\mathbb{R}$ de heye ji ber ku di her duyan de $(\Delta > 0)$ e, lê çareseriya hevkêşeya (c) di $\mathbb{R}$ de nîne ji ber ku $(\Delta < 0)$ e, ango hejmarake rast nîne ku dama wê negetîf be, ji bo çareserkirina hevkêşeyên bi vî awayî, pêdiviya me bi komeke din a hejmaran heye, navê wê **komika hejmarên komplêks e** û sembola wê jî $\mathbb{C}$ ye.

hejmara dîmen

Ew hejmara ku dama wê (-1) e û sembola wê $\boldsymbol{i}$ ye,

$i^2 = -1$ Li gorî vê $i = \sqrt{-1}$

Em dikarin koka hejmarên negetîf bi vî awayî binivîsin:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1a} = \sqrt{-1}\sqrt{a} = i\sqrt{a} \ : a > 0$$

Mînak:

Hevkêşeyên li jêr di $\mathbb{C}$ de çareser bike.

a) $z^2 + 1 = 0$
b) $z^2 + 9 = 0$

Çareserî:

a) $z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -1$

$$\Rightarrow \quad z^2 = i^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} z_1 = i \in \mathbb{C} \\ z_2 = -i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

b) $z^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -9$

$$\Rightarrow \quad z^2 = 9i^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3i \in \mathbb{C} \\ z_2 = -3i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Mînak:

Hevkêşeya li jêr di $\mathbb{C}$ de çareser bike.

$z^2 + 2z + 10 = 0$

$z^2 + 2z + 1 + 9 = 0$

$z^2 + 2z + 1 = -9 \Rightarrow (z+1)^2 = 9i^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 + 1 = 3i \\ z_2 + 1 = -3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3i - 1 \\ z_2 = -3i - 1 \end{cases}$$

Komika Hejmarên komplêks $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \{z = a + bi \ : \ \mathrm{a} \in \mathbb{R}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$

$a + bi$: hejmareke komplêks e.
a : Beşa rast e, sembola wê $R_e(\mathrm{Z})$ ye.
bi : Beşa dîmen e, sembola wê $I_m(\mathrm{Z})$ ye.

Mînak:

hejmara komplêks	Beşa rast	Beşa dîmen
$-4+7i$	-4	$+7i$
6	6	0
$+7i$	0	$+7i$

Mînak:

Beşên rast û dîmen ji hejmarên jêr re bibîne.

a) $\mathrm{z} = -1 + 8i$, b) $\mathrm{z} = \sqrt{2} + 5i$, c) $\mathrm{z} = 0$

Çareserî:

a) $\mathrm{z} = -1 + 8i$

$R_e(\mathrm{Z}) = -1$, $I_m(\mathrm{Z}) = 8i$

b)$\mathrm{z} = \sqrt{2} + 5i$

$R_e(\mathrm{Z}) = \sqrt{2}$, $I_m(\mathrm{Z}) = 5i$

c) $\mathrm{z} = 0$

$R_e(\mathrm{Z}) = 0$, $I_m(\mathrm{Z}) = 0$

Yeksanîbûna du Hejmarên komplêks

Eger $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmarên komplêks bin wê demê: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 , y_1 = y_2)$

du Hejmarên komplêks û hevjimar

eger du hejmarên komplêks hebin, beşên rast û dîmen yeksanî hav bin lê hêmayên dîmen dij hev bin, wê demê yek ji wan hevjimara ya din e.

Eger $z = x + iy$ hejmareke komplêks be, hevjimara wê $\bar{z} = x - iy$

ji bu dîtna hevjimara hejmara komplêks, beşa rast wek xwe dimîne û hêmaya beşa dîmen tê guhertin.

- Hevjimara hevjimara z yeksanî z ye, li gorî wê $\bar{\bar{z}} = z$
- Hevjimara hejmareke rast a yeksanî a ye, li gorî wê $\bar{a} = a$
- Hevjimara $\boldsymbol{bi}$ yeksanî $-\boldsymbol{bi}$ ye, li gorî vê $\overline{\boldsymbol{bi}} = -\boldsymbol{bi}$

Mînak:

$z = -4 + 5i$ hevjimara wê $\bar{z} = -4 - 5i$

$\mathrm{z} = 7$ hevjimara wê $\bar{z} = 7$

$z = -9i$ hevjimara wê $\bar{z} = 9i$

Hêzên xwezayî yên i

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$

$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$

Wek em dibînin: $i^n = \{i \ , -i, \ 1, \ -1\} \quad : n \in \mathbb{N}$

Mînak:

1) $i^{33} = i^{32}.i = (i^4)^8.i = i$
2) $i^{101} = i^{100}.i = (i^4)^{25}.i = i$

Dirêjahiya hejmara komplêks

Eger $z = x + iy$ hejmareke komplêks be:

$$|\mathrm{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |\mathrm{z}|^2 = x^2 + y^2$$

$|\mathrm{z}|$: Dirêjahiya hejmara z ye.

Mînak:

Eger $z = 6 + 8i$ hejmareke komplêks be, $|\mathrm{z}|$ bibîne.

Çareserî:

$$|\mathrm{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Karanînên li ser hejmarên komplêks

1) **Komkirin:**
Eger $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmarên komplêks bin, wê demê $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Taybetiyên komkirinê

Eger z_1 , z_2 , z_3 sê hejmarên komplêks bin

a) karanîna Komkirinê yekgirtî ye.

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

b) karanîna Komkirinê hevguhêr e

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

c) Sifir "0" di karanîna komkirinê de, bêbandor e.
$z + 0 = 0 + z = z \quad : z \in \mathbb{C}$

Mînak:

Eger $z_1 = 2 + 7i$, $z_2 = -1 + 3i$, hejmarên komplêks bin,

$z_1 + z_2$ bibîne.

Çareserî:

$z_1 + z_2 = (2 - 1) + i(7 + 3)$

$z_1 + z_2 = 1 + 10i$

2) Derxistin:

Eger $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmarên komplêks bin, wê demê $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Têbînî: $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

Mînak:

Eger $z_1 = \sqrt{3} - 2i$, $z_2 = -4\sqrt{3} + 5i$, hejmarên komplêks bin,

$z_1 - z_2$ û $z_2 - z_1$ bibîne.

Çareserî:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \left(\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right) + i(-2 - 5) \\ &= 5\sqrt{3} - 7i \\ z_2 - z_1 &= \left(-4\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) + i(5 + 2) \\ &= -5\sqrt{3} + 7i \end{aligned}$$

Wek tê dîtin $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

3) Hevdan:

Eger $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ du hejmarên komplêks bin,
wê demê $z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2)$

$= x_1x_2 + i\,x_1y_2 + i\,x_2y_1 + i^2y_1y_2$ lê $i^2 = -1$

$$\boxed{z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$$

Taybetiyên hevdanê

Eger z_1 , z_2 , z_3 sê hejmarên komplêks bin:

a) Karanîna hevdanê yekgirtî ye.
$z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$

b) Karanîna hevdanê hevguhêr e.
$z_1 . z_2 = z_2 . z_1$

c) Di karanîna hevdanê de, hejmara 1 bêbandor e
$z . 1 = 1 . z = z \quad : z \in \mathbb{C}$

d) Di karanîna hevdan de, levakirina hevdanê bi komkirinê re
$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3 = (z_2 + z_3) . z_1$

Mînak:

Eger $z_1 = 2 + 7i$, $z_2 = -1 + 3i$, hejmarên komplêks bin,
$z_1 . z_2$ bibîne.

Çareserî:

$z_1 . z_2 = (2 + 7i)(-1 + 3i)$

$= -2 + 6i - 7i + 21i^2$

$= -2 - i - 21$

$= -23 - i$

Hevdana Hejmareke komplêks bi hevjimara wê re:

Eger $\bar{z} = x - iy$ hevjimara $z = x + iy$ be, wê demê

$\bar{z}.\mathrm{z} = (x - iy)(x + iy)$

$= x^2 + ixy - ixy - i^2y^2$ lê $i^2 = -1$

$$\boxed{\bar{z}.\mathrm{z} = x^2 + y^2}$$

Têbînî:

$\bar{z}.\mathrm{z} = |\mathrm{z}|^2 \Leftrightarrow |\mathrm{z}| = \sqrt{\bar{z}.\mathrm{z}}$

Mînak:

Eger $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, hejmareke komplêks be, $\bar{z}$ û $\bar{z}.\mathrm{z}$ bibîne.

Çareserî:

$\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\bar{z}.\mathrm{z} = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

Wek tê dîtin $|\mathrm{z}| = \sqrt{\bar{z}.\mathrm{z}} = \sqrt{1} = 1$

4) parvekirin:

Em par û paranê hevdanî hevjimara paranê dikin.

$\mathrm{z} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \quad (z_2 \neq 0)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1+iy_1).(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2).(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2-i\,x_1y_2+i\,x_2y_1-i^2y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} \quad : i^2 = -1$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}{{x_2}^2+{y_2}^2}$

Mînak:

Eger $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 + i$, hejmarên komplêks bin, $\mathrm{z} = \frac{z_1}{z_2}$ bibîne.

Çareserî:

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

$$z = \frac{1+3i}{4+i} = \frac{(1+3i).(4-i)}{(4+i).(4-i)}$$

$$= \frac{4-i+12i-3i^2}{(4)^2+(3)^2} = \frac{7+11i}{16+9} = \frac{7}{25} + \frac{11i}{25}$$

Taybetiyên dirêjahiya hejmara komplêks

Eger z_1, z_2, z_3 sê hejmarên komplêks bin û $k \in \mathbb{R}$ be:

1) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
5) $|z^n| = |z|^n \quad : n \in \mathbb{N}$
6) $|k.z| = |k|.|z|$

Mînak:

Eger $z = \sqrt{3} + i$, hejmareke komplêks be, $|z|$, z^2 , $|z^2|$, $|z|^2$ bibîne.

Çareserî:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$z^2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3}i - i^2 = 4 + 2\sqrt{3}i$$

$$|z^2| = |z|^2 = 2^2 = 4$$

Taybetiyên hevjmar:

Eger $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}$ du hejmarên komplêks bin.

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
5) $|z| = 1 \Longrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
6) $z + \bar{z} = 2x$ û $z - \bar{z} = 2yi$
7) $\begin{cases} \bar{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \quad hejmareke \text{ rast e} \\ \qquad \bar{z} = -z \quad \Leftrightarrow \quad z \quad dîmen\ e \end{cases}$

Mînak:

Eger $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$ hejmareke komplêks be,

1) $|z|$ bibîne.
2) $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ bibîne.

Çareserî:

1) $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$

2) $\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

Wek tê dîtin $\bar{z} = \frac{1}{z}$

PIRSÊN BEŞA HEŞTEM

1) Hejmarên li jêr bi awayekî sade binivîse.

a) i^{-10} **b)** $i^2 + i^8$

c) $i^3 + i^{20}$ **d)** i^{100}

e) i^{77} **f)** $i^4 + i^{-12}$

g) $i^5 + i^9$ **h)** i^{18}

2) Hejmarên li jêr bi awayekî sade binivîse.

a) $(3 + 2i) + (-4 + 6i)$ **b)** $(2 + 3i) + (-6 + i)$
c) $(7 - 4i) + (-2 + i)$ **d)** $(-2 + 4i) + (5 - 4i)$
e) $(0.5 + i) - (2 - i)$ **f)** $(5 + 7i) + (-5 + 4i)$
g) $(-3 - i) - (4 - 5i)$ **h)** $(2 + 4.1i) - (-1 + 6.3i)$

3) Hejmarên li jêr bi awayekî sade binivîse.

a) $(-2 - i)^2$ **b)** $(1 + 4i)^2$
c) $(5 + 2i)^2$ **d)** $(3 + i)^2$
e) $(2 + i)(4 + 3i)$ **f)** $(3 + 5i)(3 - 5i)$
g) $(5 + 3i)(2 + 6i)$ **h)** $(6 + 7i)(6 - 7i)$

4) Hejmarên li jêr bi awayekî sade binivîse.

a) $\frac{5+i}{6+i}$ **b)** $\frac{i}{1+2i}$

c) $\frac{5-i}{5+i}$ **d)** $\frac{3-2i}{-4-i}$

e) $\frac{1+2i}{2+3i}$ **f)** $\frac{3+4i}{1+5i}$

g) $\frac{2-\sqrt{2}i}{3+\sqrt{6}i}$ **h)** $\frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{2}i}$

5) Hevkêşeyên li jêr di $\mathbb{C}$ de çareser bike.

$5z^2 + 5 = 0$ $\quad$ $2z^2 + 12 = 0$

$4z^2 + 64 = 0$ $\quad$ $6z^2 + 72 = 0$

$3z^2 + 507 = 0$ $\quad$ $z^2 + 4z + 20 = 0$

6) Eger $\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{-2 + i}$, $\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{-4 + 3i}$, hejmarên komplêks bin. hejmarên li jêr bi awayê $\boldsymbol{x + yi}$ binvîse.

a) $z_1 + z_2$ $\quad$ **b)** $z_1 - z_2$

c) $z_1 . z_2$ $\quad$ **d)** $\frac{z_1}{z_2}$

e) ${z_1}^7$

7) Eger $z_1 = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$ hejmareke komplêks be, vê hejmarê bi awayê $\boldsymbol{x + yi}$ binivîse û $\bar{\boldsymbol{z}}$, $|\mathbf{z}|$ bibîne.

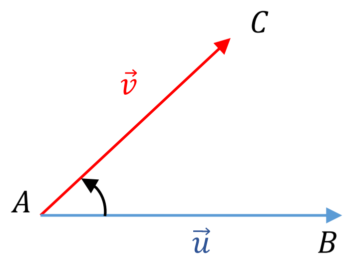
BEŞA NEHEM: GEOMETRIYA ANALÎZ DI VALAHIYÊ DE

TÎR Û GEOMETRIYA ANALÎZ

TÎR Û GEOMETRIYA ANALÎZ

Qiraça di navbera du tîran de

Eger $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ du tîr bin û $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ be, li gorî vê qiraça di navbera her du tîrên $\vec{u}, \vec{v}$ de qiraçeke bi alî ye, sembola wê $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ ye, ji $\overrightarrow{AB}$ re kenarê destpêkê û ji $\overrightarrow{AC}$ re kenarê dawî tê gotin.



Eger $\overrightarrow{AB}$ bi awayê rasterast (dij tîrên demjimêrê) bizivire û cara yekem li ser $\overrightarrow{AC}$ bisekine, qiraçek tê çêkirin pîvana wê θ ye, lê eger zivirandin berdewam bike ta ku careke din li ser $\overrightarrow{AC}$ bisekine, wê demê pîvana qiraçê dibe $\theta + 2\pi$

Eger $\overrightarrow{AB}$ bi awayê nerasterast (wek tîrên demjimêrê) bizivire û cara yekem li ser $\overrightarrow{AC}$ bisekine, qiraçek tê çêkirin pîvana wê $\theta - 2\pi$

Bi awayekî giştî:

Eger θ pîvana qiraça $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ be, tevahiya pîvanên qiraça di navbera her du tîrên $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ de bi vî awayî tên dîtin: $\theta + 2\pi K \;:\; K \in \mathbb{Z}$

Yan: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \theta + 2\pi K \;:\; K \in \mathbb{Z}$

Kordînata homojen di teqalê de

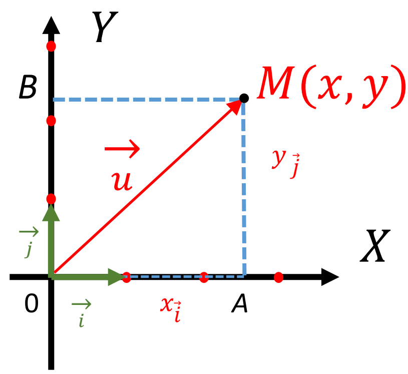
Di awayê li jêr de, du teware hene xx', yy'

Ji tîra $\vec{\imath}$ re tîra menê ya tewareya xx' tê gotin.

Ji tîra $\vec{\jmath}$ re tîra menê ya tewareya yy' tê gotin.

$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = 1 \ , \ \widehat{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \frac{\pi}{2}$

Ji teqaleya $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ re **kordînata homojen** tê gotin.



Li gorî zagona kenarên rastênhev tê dîtin ku

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (1)

Eger $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ li ser heman rahijtekê bin û $|\vec{\boldsymbol{\imath}}| = \mathbf{1}, |\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}| = |\boldsymbol{x}|$,
wê demê $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{x}.\vec{\boldsymbol{\imath}}$

Eger $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ li ser heman rahijtekî bin û $|\vec{\boldsymbol{\jmath}}| = \mathbf{1}, |\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}| = |\boldsymbol{y}|$,
wê demê $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{y}.\vec{\boldsymbol{\jmath}}$

Em di (1) bi cih bikin tê dîtin ku:

$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}.\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}.\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ yan jî $\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Jê re **forma analîz ya tîra $\vec{\boldsymbol{u}}$** tê gotin.

Encam

1) Eger $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$, $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ du tîr bin, wê demê
$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath}$
2) Eger $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ tîrek be û $a \in \mathbb{R}$ wê demê
$a.\vec{u} = (a.x_1)\vec{\imath} + (a.y_1)\vec{\jmath}$
3) Qiraça di navbera $\vec{u}$ û tewareya xx' de: $\widehat{(\vec{\imath},\vec{u})} = \widehat{(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})}$

4) Qiraça di navbera $\vec{u}$ û tewareya yy' de: $\widehat{(\vec{j},\vec{u})} = \widehat{(\vec{j},\overrightarrow{OM})}$
5) Eger $\widehat{(\vec{i},\vec{u})} = \theta$ be, wê demê $\widehat{(\vec{j},\vec{u})} = \frac{\pi}{2} - \theta$
6) Eger $A(x_A\,, y_A), B(x_B\,, y_B)$ du xal bin, wê demê
$\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B)\vec{i} + (y_A + y_B)\vec{j}$

Hevdana hundirîn ya du tîran

Eger $\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}$ du tîr bin û $\boldsymbol{\theta}$ qiraça di navbera wan de be, wê demê hevdana hundirîn ya her du tîran hejmareke rast e $(\vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{v}})$ û bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$

Encam:

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2) Eger $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$ li gorî vê $\vec{i}.\vec{j} = 0$
3) Eger $\vec{u} \parallel \vec{v}$ wê demê
   a) $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$ dema ku her du tîr bi heman alî bin.
   b) $\vec{u}.\vec{v} = -|\vec{u}|.|\vec{v}|$ dema ku aliyên her du tîran dij hev bin.

Lê bi giştî: Gava ku $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$ her du tîr bi hev ve girêdayî ne.

4) $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$, li gorî vê $\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|^2$ û $\vec{j}.\vec{j} = |\vec{j}|^2$
5) qiraça di navbera her du tîran de:
   Em dizanin ku $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Forma analîz ya hevdana hundirîn

eger $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\,, \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ du tîr bin, wê demê

$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j})$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\vec{i}.\vec{j}$$

Lê $\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1\,,\ \vec{j}.\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1\,,\ \vec{i}.\vec{j} = 0$

Li gorî vê:

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

forma analîz ya du tîrên yeksanî hev

Eger $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ û $\vec{v}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ du tîr bin,

$$(\vec{u} = \vec{v}) \Leftrightarrow (\quad x = x', \quad y = y' \ )$$

Têbînî:

$$\left(\vec{u} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow (\quad x = 0 \,, \quad y = 0 \quad)$$

forma analîz ya girêdana du tîran

Eger $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ û $\vec{v}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ du tîr bin û $a \neq 0 \ : \ \vec{u} = a \,.\, \vec{v}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.x' \\ a.y' \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = a.\, x' \\ y = a.\, y' \end{cases} \Leftrightarrow x(a.\, y') = a.\, x'(y)$$

Li gorî vê, formola analîz ya girêdana du tîran ev e:

$$\boxed{xy' - yx' = 0}$$

Encam:

Di teqaleya $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ de

1) Eger $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ û $\widehat{(\vec{\imath},\vec{u})} = \theta$ qiraça di navbera $\boldsymbol{\vec{u}}$ û $\boldsymbol{xx'}$ de be, wê dêmê
$\vec{\imath}.\vec{u} = 1.\,x + 0y = x \quad : \vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}.\vec{u} = |\vec{\imath}|.\,|\vec{u}|.\cos\theta = |\vec{u}|.\cos\theta$
$\Longrightarrow \ x = |\vec{u}|.\cos\widehat{(\vec{\imath},\vec{u})}$
Lê bi heman awayî $y = |\vec{u}|.\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = |\vec{u}|.\sin\widehat{(\vec{\imath},\vec{u})}$
wek em dibînin:
$\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta.\vec{\imath} + |\vec{u}|\sin\theta\,.\vec{\jmath}$
2) Eger $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$ wê demê $\quad \vec{u}.\vec{u} = x_1x_1 + y_1y_1$

Lê $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2 \ \Longrightarrow |\vec{u}|^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$

Lê gorî wê: $\quad |\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}$

Têbînî:

Em dizanin ku $|\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$, Wê demê

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}.\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}$$

Mînak:

Eger $\vec{u}(\sqrt{3},1), \vec{v}(1,\sqrt{3})$ du tîr bin,

qiraça di navbera wan de θ bibîne.

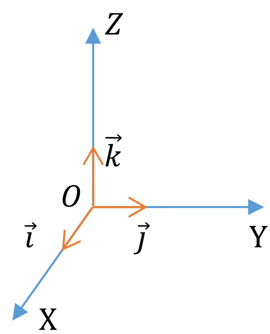
Çareserî:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}.\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3})(1)+(1)(\sqrt{3})}{\sqrt{3+1}.\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Kordînata tîk di valahiyê de

Eger $\boldsymbol{X'OX}, \boldsymbol{Y'OY}, \boldsymbol{Z'OZ}$ sê teware bin û di xala O de hev bibirin, ne di heman teqaleyê de bin û $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ tîrên men bin ji wan re, wê demê:

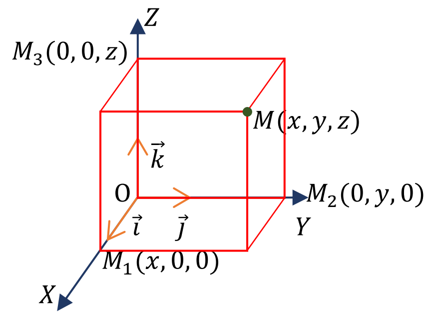


$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\widehat{(\vec{i},\vec{j})} = \widehat{(\vec{j},\vec{i})} = \widehat{(\vec{k},\vec{i})} = \frac{\pi}{2}$$

Pêkhateyên dîkartî yên xalekê di valahiyê de

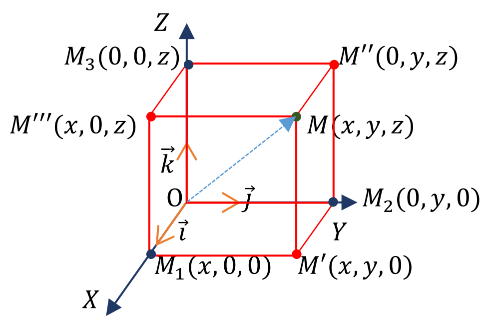
Eger $(\boldsymbol{o}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ kordînateke tîk di valahiyê de be, her xala jê, bi sê hejmarên rast $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ tê nîşankirin, ji wan re **pêkhateyên dîkartî ji xala $\boldsymbol{M}$ re** tê gotin, sembola wê jî $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ **e.**



Ji bo dîtina her sê pêkhateyan, em ji xala $\boldsymbol{M}$ sê teqaleyên bi $\mathrm{o}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{oy}, \boldsymbol{oz}$ re hevtîk xêz bikin û wan di xalên $\boldsymbol{M_1}, \boldsymbol{M_2}, \boldsymbol{M_3}$ bi rêz dibire, li gorî vê:

$\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{OM_1}}$, $\boldsymbol{y} = \overline{\boldsymbol{OM_2}}$, $\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{OM_3}}$

Tê dîtin ku $[\boldsymbol{OM}]$ eşkêla prîzmaya milkêşan $\boldsymbol{OM_1M'M_3} - \boldsymbol{M_2M'''MM''}$ û her sê pêkhateyên wê jî $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ ne.



Lê em dizanin ku: dama eşkêla pirîzmaya milkêşan yeksanî komkirina damên her sê pêkhateyan e.

Li gorî vê, dirêjahiya $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ bi vî awayî tê nivîsandin

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$$

Ji $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ re **tîra cih** ya xala $\boldsymbol{M}$ tê gotin.

Forma analîz ji tîra cih re $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{z}\vec{\boldsymbol{k}}$

û bi kurtasî bi vî awayî tê nivîsandin $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbf{z})$

forma analîz ya hevdana hundirîn

Eger $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ du tîr bin,
wê demê forma analîz ya hevdana hundirîn ji her du tîran re ev e:

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

têbînî:

- Eger $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ bin, wê demê
  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
- Li gorî vê $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$

Karanînên li ser tîran bi awaykî analîz

Kordînata hevtîk û asayî $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1) $O(0,0,0)$ xala destpêkê ye.

2) Eger $\boldsymbol{M(x,y,z)}$ xalek di valahiyê de be, wê demê

$M \in (xoy) \Leftrightarrow z = 0$ $\quad$ $M \in (ox) \Leftrightarrow y = z = 0$

$M \in (xoz) \Leftrightarrow y = 0$ $\quad$ $M \in (oy) \Leftrightarrow x = z = 0$

$M \in (yoz) \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $M \in (oz) \Leftrightarrow x = y = 0$

3) Eger $\boldsymbol{(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}$ Kordînata hevtîk û asayî be û $\boldsymbol{\vec{v}}$ tîrek bi di valahiyê de be û $\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{OM}}$, wê demê em dikarin $\boldsymbol{\vec{v}}$ bi awayekî analîz binivîsin: $\vec{v} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

4) eger $\vec{u} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}$ du tîr bin, wê demê:

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2)\vec{\imath} + (y_1 - y_2)\vec{\jmath} + (z_1 - z_2)\vec{k}$

$\alpha.\vec{v} = (\alpha.x_2)\vec{\imath} + (\alpha.y_2)\vec{\jmath} + (\alpha.z_2)\vec{k} \quad : \alpha \in \mathbb{R}$

5) Eger $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ û $\vec{v}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ du tîrên girêdayî hev bin $\Leftrightarrow \vec{u} = a\,.\vec{v} \;: a \in \mathbb{R}^*$

Li gorê wê $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.x' \\ a.y' \\ a.z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a.x' \\ y = a.y' \\ z = a.z' \end{cases}$

Mînak:

Eger $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$ $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ yên li jêr bibîne.

1) $-2\vec{u}$, $-\frac{1}{2}\vec{v}$
2) $\vec{u} + \vec{v},$ $\vec{u} - \vec{v}$

Çareserî:

1) $-2\vec{u} = -2(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}) = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 6\vec{k}$
$-\frac{1}{2}\vec{v} = -\frac{1}{2}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}) = -\vec{\imath} - \frac{1}{2}\vec{\jmath} - 2\vec{k}$
2) $\vec{u} + \vec{v} = (1+2)\vec{\imath} + (2+1)\vec{\jmath} + (-3+4)\vec{k}$
$= 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$

$\vec{u} - \vec{v} = (1-2)\vec{\imath} + (2-1)\vec{\jmath} + (-3-4)\vec{k}$
$= -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}$

Dûrahiya di navbera du xalan de

Li gorî teoriya **Pîsagors** (Pythagoras), Dûrahiya di navbera her du xalan O, M de:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pêkhateyên dîkartî yên xalekê di valahiyê de

Eger $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_{B,} z_B)$ du xal bin di valahiyê de bin, wê demê em dikarin tîra $\overrightarrow{AB}$ bi vî awayê binivîsin:

$$\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B)\vec{\imath} + (y_A + y_B)\vec{\jmath} + (z_A + z_B)\vec{k}$$

û Dirêjahiya wê ev e:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2 + (z_A + z_B)^2}$$

Pêkhateyên xala nîvê tîrekî

Eger $A(x_a, y_a, z_a)$ û $B(x_b, y_{b,} z_b)$du xal bin, wê demê pêkhateyên xala I nîvê $\overrightarrow{AB}$ ev in:

$$x_I = \frac{x_b + x_a}{2} \qquad y_I = \frac{y_b + y_a}{2} \qquad Z_I = \frac{z_b + z_a}{2}$$

Hevdana derveyî ya du tîran

Eger $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ du tîr bin di valahiyê de, hevdana wan bi vî awayî tê nivîsandin:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{\imath} + (x_2 z_1 + x_1 z_2)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\vec{k}$$

Yan bi awayekî din:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Mînak:

Eger $\vec{u}(1,2,1), \vec{v}(-1,1,-2)$ du tîr bin, $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$ bibîne.

Çareserî:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \overrightarrow{-5\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

Lê dirêjahiya wê ev e:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{35}$$

Tîbînî:

1) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ hevtîk e li ser $\vec{u}$ û $\vec{v}$

2) Dirêjahiya wê bi vî awayê tî nivîsanden:
$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

3) **a)** Eger $\vec{u}$ û $\vec{v}$ du tîrên girêdayî hev bin $\Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = 0$
b) $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ û $\vec{v}$ du tîrên girêdayî hev in

Diyarker:

Diyarkera hêza duyemîn

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

Diyarkera hêza sêyemîn

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Mînak:

Nirxê vê diyrkerê bibîne $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Çareserî:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1\times4 - 0\times-2) + (3\times4 - 5\times-2) + 2.(0\times3 - 5\times1)$$

$$= (4 - 0) + (12 + 10) + 2(0 - 5)$$

$$= 4 + 22 - 10 = 16$$

PIRSÊN BEŞA NEHEM

1) Nirxê van diyarkeran bibîne.

a) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & -8 & -1 \\ 6 & -24 & -3 \end{vmatrix}$

2) Tekez bike ku:

a) $\vec{u}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, -\mathbf{1})$, $\vec{v}(-\mathbf{4}, -\mathbf{6}, \mathbf{2})$ rastêhev in.

b) $\vec{u'}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $\vec{v'}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3})$ bi hev re tîk in.

3) Eger $\vec{u}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, -\mathbf{1})$, $\vec{v}(-\mathbf{4}, -\mathbf{6}, \mathbf{2})$ û $\vec{w}(-\mathbf{4}, -\mathbf{6}, \mathbf{2})$ sê tîr bin:

a) $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$, $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ û $|\vec{w}|$ bibîne.

b) Qiraça di navbera $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$ û $(\vec{v}, \vec{w})$ de bibîne.

4) Eger $\vec{u}(\mathbf{4}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$, $\vec{v}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ û $\vec{w}(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$ sê tîr bin:
$\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, $|\vec{v} \wedge \vec{u}|$ û $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ bibîne.

5) Li gorî rewşên li jêr, $\vec{u}.\vec{v}$ bibîne.

a) $|\vec{u}| = 2, \ \ |\vec{v}| = 6 \ \ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 0$

b) $|\vec{u}| = 4, \ \ |\vec{v}| = 5 \ \ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \pi$

c) $|\vec{u}| = 1, \ \ |\vec{v}| = -3 \ \ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{4}$

d) $\vec{u}(7,1), \ \ \vec{v}(3,8)$

6) Eger $\mathrm{A}(1,-3), \ \ \mathrm{B}(7,3)$ û $\mathrm{C}(6,4)$ sê xal bin:

a) $\mathrm{AB}, \ \mathrm{AC}, \ \mathrm{BC}$ bibîne.

b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ û $\cos\widehat{BAC}$ bibîne.

BEŞA DEHEM: SÊGOŞENASÎ

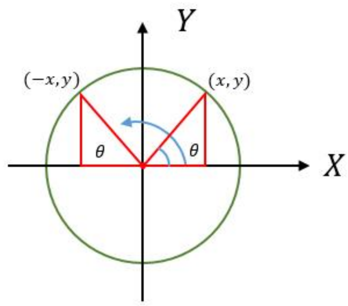
1) Vegerandina li çariya yekem û hevkêşeyên sêgoşeyî
2) Qiraça bi alî
3) Hevgêşeyên sêgoşeyî yên sade
4) Rêjeyên sêgoşeyî ji komkirin yan jî derxistina du qiraçan re
5) Wekheviyên sêgoşeyî yên navdar
6) Formên guhertinan

VEGERANDİNA Lİ ÇARİYA YEKEM Û HEVKÊŞEYÊN SÊGOŞEYÎ

Têkiliyên di navbera fonksiyonên sêgoşeyî de

1) Fonksiyonên sêgoşeyî ji du qiraçên pîvanên wan $\pi - \theta, \theta$ bin:

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$



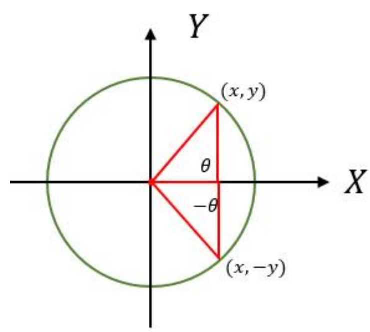
Mînak:

$$\sin(120^{\circ}) = \sin(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \sin(60^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(120^{\circ}) = \cos(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\cos(60^{\circ}) = -\frac{1}{2}$$
$$\tan(120^{\circ}) = \tan(180^{\circ} - 60^{\circ}) = -\tan(60^{\circ}) = -\sqrt{3}$$

Têbînî 1:

Eger $\theta, -\theta$ du qiraç bin, wê demê

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



Mînak:

$\sin(-30^{\circ}) = -\sin 30^{\circ}$
$\cos(-30^{\circ}) = \cos 30^{\circ}$
$\tan(-30^{\circ}) = -\tan 30^{\circ}$

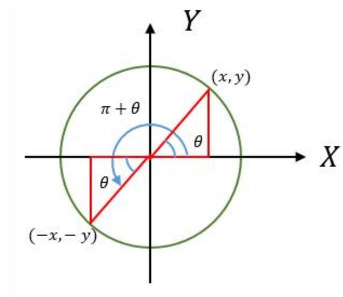
Têbînî 2:

$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$
$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$
$\tan(2\pi + \theta) = \tan\theta$

Mînak:

$\sin(390^{\circ}) = \sin 30^{\circ}$
$\cos(400^{\circ}) = \cos 40^{\circ}$
$\tan(440^{\circ}) = \tan 80^{\circ}$

2) Fonksiyonên sêgoşeyî ji du qiraçên pîvanên wan $\pi+\theta, \theta$ bin:

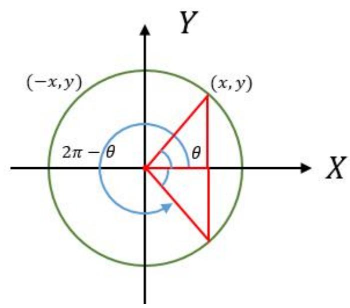


$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

Mînak:

$$\sin(210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}$$
$$\cos(210^\circ) = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(210^\circ) = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) Fonksiyonên sêgoşeyî ji du qiraçên pîvanên wan $2\pi-\theta, \theta$ bin:



$\sin(2\pi-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$
$\tan(2\pi-\theta) = -\tan\theta$

Mînak:

$$\sin(315^\circ) = \sin(360^\circ - 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos(315^\circ) = \cos(360^\circ - 45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan(315^\circ) = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan(45^\circ) = -1$$

Têbînî:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$

Bi kurtasî

Çariya duyem $(\pi-\theta)$ yan $\frac{\pi}{2}+\theta$	Çariya yekem (θ) yan $\frac{\pi}{2}-\theta$
$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$	$\sin(2\pi+\theta)=+\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	$\cos(2\pi+\theta)=+\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	$\tan(2\pi+\theta)=+\tan\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=+\cos\theta$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=+\cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=+\sin\theta$
Çariya sêyem $(\pi+\theta)$	Çariya çarem $(2\pi-\theta)$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	$\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=+\tan\theta$	$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$

Hînkirin:

1) Eger:

$$A = \sin(2\pi - \theta)\cos(\pi - \theta)\tan(2\pi + \theta)$$

$$B = \frac{\cos(2\pi + \theta)\cos(-\theta)\sin(-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

a) $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ sade bike.

b) piştre $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ û $\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$ bibîne.

2) Fonksiyonên jêr wek qiraçên teng binivîse,.

a) $\sin 163°$ b) $\tan 248°$

c) $\cos 327°$ d) $\cos(-213°)$

3) Tekez bike ku wekheviya li jêr rast e.

$$\frac{\sin(\pi + \theta)\tan(2\pi + \theta)\cos\theta}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \sin\theta$$

4) Bi karanîna vegerandina li çariyan, nirxên yên li jêrbibîne.

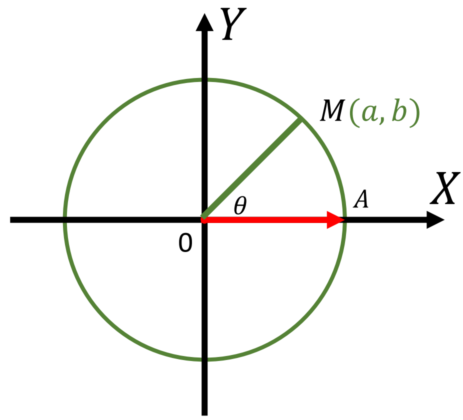
a) $\frac{\sin(-30°)}{\tan(150°)} + \cos 330°$ b) $(1 - \cos 30°)(1 - \cos 210°)$

c) $\tan 300° \cos 120°$ d) $\cos 780° - (\sin 315°)(\cos 405°)$

QIRAÇA BI ALÎ

li ser awayê li kêlekê bihizire

eger $\overrightarrow{OA}$ bi aliyê pozîtîf de bizivire û li ser $\overrightarrow{OM}$ raweste, wê demê qiraça $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$ pêk tê jê re **qiraça bi alî** tê gotin û pîvana wê θ ye.



Eger zivirîn berdewam bike ta ku careke din li ser $\overrightarrow{OM}$ raweste, wê demê pîvana qiraça $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$ dibe $\theta + 2\pi$,

Lê eger bi aliyê negatîf de bizivire ta ku careke din li ser $\overrightarrow{OM}$ raweste, wê demê pîvana qiraça $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}\right)$ dibe $\theta - 2\pi$.

Forma dîtina qiraça bi alî ev e:

$$\theta + 2\pi K \quad : \quad K \in \mathbb{Z}$$

Formên sereke di navbera rêjeyên sêgoşeyî de

$\tan(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} : \ \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$	$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} : \theta \neq \ \pi k$
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 : \theta \in \mathbb{R}$	
$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} : \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$	$1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta} : \theta \neq \pi k$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} : \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + \ \pi k$	$co\sec\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} : \theta \neq \ \pi k$

Mînak 1:

$1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$ bi awayekî sade binivîse.

Çareserî:

$$1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{1-sin^2 x}{1+\sin x}=1-\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

$$=1-1+\sin x=\mathbf{\sin x}$$

Mînak 2:

wekheviya li jêr tekez bike.

$$(\mathbf{\sin t+\cos t})^2+(\mathbf{\sin t-\cos t})^2=\mathbf{2}$$

Çareserî:

$$(\sin t+\cos t)^2+(\sin t-\cos t)^2=$$

$$(sin^2 t+2\sin t.\cos t+cos^2 t)+(sin^2 t-2\sin t.\cos t+cos^2 t)=$$

$$(sin^2 t+cos^2 t)+(sin^2 t+cos^2 t)=1+1=\mathbf{2}$$

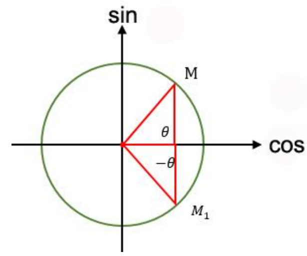
Hînkirin:

Wekheviyên li jêr tekez bike.

1) $sin^5 t.cos^2 t=(cos^2 t-2cos^4 t+cos^6 t)(\sin t)$
2) $tan^2 t-sin^2 t=tan^2 t.sin^2 t$

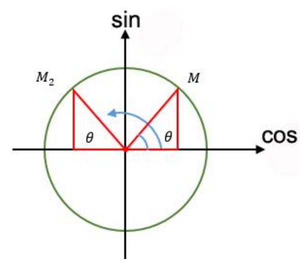
HEVKÊŞEYÊN SÊGOŞEYÎ YÊN SADE

1) Hevkêşeya bi awayê $\cos(x) = \cos(\theta)$



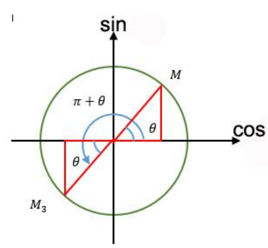
eger M, M_1 du xalên hemalî bin li gorî tewareya cos, wê demê:
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
tê dîtin ku $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k)$
li gorî vê, eger $\cos(x) = \cos(\theta)$ wê demê:
$x = \theta + 2\pi k$
yan jî $x = -\theta + 2\pi k'$

2) Hevkêşeya bi awayê $\sin(x) = \sin(\theta)$



eger M, M_2 du xalên hemalî bin li gorî tewareya sin wê demê:
$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
tê dîtin ku $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi k)$
li gorî vê, eger $\sin(x) = \sin(\theta)$ wê demê:
$x = \theta + 2\pi k$
yan jî $x = (\pi - \theta) + 2\pi k'$

3) Hevkêşeya bi awayê $\tan(x) = \tan(\theta)$



eger M, M_3 du xalên hemalî bin li gorî xala destpêkê wê demê:
$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$
tê dîtin ku $\tan(\theta) = \tan(\theta + 2\pi k)$
bi vê yekê em dibînin ku:
$\tan(x) = \tan(\theta)$
$x = \theta + \pi k$

Mînak:

Hevkêşeyên li jêr di $\mathbb{R}$ de çareser bike.

1) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

3) $\tan(x) = -1$

Çareserî:

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$2x-\dfrac{\pi}{4}=x+\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \Longrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \Longrightarrow x=\dfrac{7\pi}{12}+2\pi k$

yan jî $2x-\frac{\pi}{4}=-x-\frac{\pi}{3}+2\pi k' \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi k' \Longrightarrow x=\frac{-\pi}{12}+2\pi k'$

2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ yan\ j\hat{\imath}\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x=\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi k' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{10\pi}{24}+2\pi k \\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k' \end{cases}$$

3) $\tan(x)=-1$

$$\tan(x)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow x=\pi-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{3\pi}{4}+\pi k$$

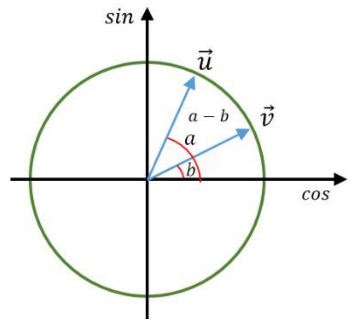
Hînkirin:

Hevkêyeşên li jêr di $\mathbb{R}$ de tekez bike.

1) $1+2\cos\theta=0$
2) $1-\sqrt{2}\cos\theta=0$
3) $2\sin\theta-1=0$
4) $\sin^2\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=0$

RÊJEYÊN SÊGOŞEYÎ JI KOMKIRIN YAN JÎ DERXISTINA DU QIRAÇAN RE

1) Dîtina $\cos(a - b)$:



Li ser awayê li rexê bihizire.

Eger $|\vec{\boldsymbol{u}}| = \mathbf{1}, |\vec{\boldsymbol{v}}| = \mathbf{1}$ bin û $\boldsymbol{a}$ qiraça di navbera $\vec{\boldsymbol{u}}$ û $\boldsymbol{XX'}$ de be û $\boldsymbol{b}$ qiraça di navbera $\vec{\boldsymbol{v}}$ û $\boldsymbol{XX'}$ de be, li gorî wêneyê em dibînin ku $\vec{u}(\cos a, \sin a)$ û $\vec{v}(\cos b, \sin b)$

- $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(a-b) = \cos(a-b)$ (1)

- Lê $\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2$
  $= \cos a \cos b + \sin a \sin b$ (2)

ji (1) û (2) em dibînin ku:

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

Mînak:

$\cos(15^\circ)$ bibîne.

Çareserî:

$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$= \cos 45^\circ . \cos 30^\circ + \sin 45^\circ . \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$

2) Dîtina $\cos(a + b)$:

Eger em $-\boldsymbol{b}$ bi $+\boldsymbol{b}$ di (1) de biguherin, wê demê

$\cos(a - (-b)) = \cos a.\cos(-b) + \sin a.\sin(-b)$

Lê $\cos(-b) = \cos(b)$, $\sin(-b) = -\sin(b)$ li gorî vê

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Mînak:

$\cos(75^{\circ})$ bibîne.

Çareserî:

$$\cos(75^{\circ}) = \cos(45^{\circ} + 30^{\circ})$$

$$= \cos 45^{\circ} . \cos 30^{\circ} - \sin 45^{\circ} . \sin 30^{\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

3) Dîtina $\sin(a+b)$:

Eger em $\frac{\pi}{2} - a$ bi $+a$ di (1)'ê de biguherin, wê demê

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (1)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - (a+b)) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a) \sin b$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \sin(a+b) , \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$= \sin a , \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Mînak:

$\sin(75^{\circ})$ bibîne.

Çareserî:

$$\sin(75^{\circ}) = \sin(45^{\circ} + 30^{\circ})$$

$$= \sin 45^{\circ}.\cos 30^{\circ} + \cos 45^{\circ}.\sin 30^{\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

4) Dîtina $\sin(a-b)$:

Eger em $-b$ bi $+b$ di (3)'yê biguherin, wê demê

$\sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$ li gorî vê:

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$$

Mînak:

$\sin(15^{\circ})$ bibîne.

Çareserî:

$$\sin(15^{\circ}) = \sin(45^{\circ} - 30^{\circ})$$
$$= \sin 45^{\circ}.\cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ}.\sin 30^{\circ}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Bi kurtasî:

1) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3) $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
4) $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$
5) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
6) $\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot b + \cot a}$

Hînkirin:

Tekez bike ku:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ **d)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

e) $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ **f)** $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

g) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ **h)** $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

WEKHEVIYÊN SÊGOŞEYÎ YÊN NAVDAR

$$\sin(a+b).\sin(a-b) = [\sin a.\cos b + \cos a.\sin b][\sin a.\cos b - \cos a.\sin b]$$

$$= (\sin a.\cos b)^2 - (\cos a.\sin b)^2$$
$$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b \qquad : \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$
$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$\boxed{\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b}$$

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = [\cos a\cos b + \sin a\sin b][\cos a\cos b - \sin a\sin b]$$

$$= (\cos a.\cos b)^2 - (\sin a.\sin b)^2$$

$$= \cos^2 a.\cos^2 b - \sin^2 a.\sin^2 b \qquad : \sin^2 a = 1-\cos^2 a$$

$$= \cos^2 a + \cos^2 b - 1$$

$$\boxed{\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1}$$

Rêjeyên sêgoşeyî yên qatjimara qiraçekê

❖ **Ji bo dîtina $\sin 2a$**

Em dizanin ku $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

Eger $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ be, wê demê

$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a.\cos a + \cos a.\sin a$

$$= 2\sin a.\cos a$$

❖ **Ji bû dîtina $\cos 2a$,**

Em dizanin ku $\mathbf{\cos(a+b) = \cos a\,.\cos b - \sin a.\sin b}$

Eger $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ be, wê demê

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a\,.\cos a - \sin a\,.\sin a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$

Bi awayekî din:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad : \sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \quad : \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

Bi kurtasî:

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

Mînak:

Tekez bike ku $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$

Çareserî:

$$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta+2\sin\theta.\cos\theta}{1+\cos\theta+(2cos^2\theta-1)}$$

$$= \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Mînak:

Hevkêşeya li jêr di $\mathbb{R}$ de çareser bike.

$$\frac{1-\sin t-\cos 2t}{\sin 2t+\cos t} = -1$$

Çareserî:

$$\frac{1-\sin t-(1-2sin^2 t)}{2\sin t.\cos t-\cos t} = -1$$

$$\frac{2sin^2 t-\sin t}{\cos t(2\sin t-1)} = -1$$

$$\frac{\sin t(2\sin t-1)}{\cos t(2\sin t-1)} = -1$$

$\tan t = -1 \Longrightarrow t = 135° + 180°k : k \in \mathbb{Z}$

Formên damên rêjeyên sêgoşeyî bi nîşana $\cos 2\alpha$

Bi hin karanînên cabrî, em van bi dest dixin.	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
Ji parvekirina her du formên li jor, em vê bi dest dixin.	$tan^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

Formên rêjeyên sêgoşeyî ji qiraçekê re bi nîşana rêjeyên sêgoşeyî yên nîvê qiraçê

Eger $2\alpha = \theta \Longrightarrow \alpha = \frac{\theta}{2}$ em vê di formên li jor bi cih bikin:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{1 - tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Formên $\sin 3a$ û $\cos 3a$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

Mînak:

Tekez bike ku

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = 1 + 2\cos 2\theta$$

Çareserî:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} = \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\times\frac{1-\cos 2\theta}{2} = 3 - 2 + 2\cos 2\theta = \mathbf{1 + 2\cos 2\theta}$$

Hînkirin:

1) Wekheviyên li jêr tekez bike.
   a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$
   b) $\cos^2 x(1 - \tan^2 x) = \cos 2x$
   c) $4\sin x\cos x\cos 2x = \sin 4x$

2) Wekheviyên li jêr çareser bike.
   a) $\cos 2x = \cos(x + \frac{\pi}{4})$
   b) $\sin 2x = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
   c) $\sin 2x = \cos(x + \frac{\pi}{3})$
   d) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$
   e) $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$
   f) $\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sin x$

FORMÊN GUHERTINAN

1) Formên guhertina ji komkirinê ber bi hevdanê ve

❖

$$\begin{array}{rl} & \sin(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \\ + & \sin(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{sin(a+b)+sin(a-b)=2\,sin}\,\boldsymbol{a}.\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{b}$$

❖

$$\begin{array}{rl} & \sin(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \\ - & \sin(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{sin(a+b)-sin(a-b)=2\,cos}\,\boldsymbol{a}.\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{b}$$

❖

$$\begin{array}{rl} & \cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ + & \cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{cos(a+b)+cos(a-b)=2\,cos}\,\boldsymbol{a}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{b}$$

❖

$$\begin{array}{rl} & \cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ - & \cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{cos(a+b)-cos(a-b)=-2\,sin}\,\boldsymbol{a}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{b}$$

Bi kurtasî:

$\sin(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \sin(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = 2\sin a.\cos b$ (1)

$\sin(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - \sin(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = 2\cos a.\sin b$ (2)

$\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) + \cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = 2\cos a\cos b$ (3)

$\cos(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - \cos(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = -2\sin a\sin b$ (4)

2) Formên guhertina ji hevdanê ber bi komkirinê ve

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a.\sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a-b)]$$

$$\tan a \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

3) Formên guhertna ji komkirina du rêjeyên sêgoşeyî ber bi hevdanê ve.

Eger $\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{x-y}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \end{cases}$ bicihkirina van di formên guhertina ji hevdan ber bi komkirinê ve:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

Mînak:

Tekez bike ku $\cos(15^{\circ}).\cos(75^{\circ}) = \frac{1}{4}$

Çareserî:

$$\cos(15^\circ).\cos(75^\circ) = \frac{1}{2}[\cos(15^\circ + 75^\circ) + \cos(15^\circ - 75^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(90^\circ) + \cos(-60^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Mînak:

Tekez bike ku $\cos(30^\circ + \theta) + \cos(30^\circ - \theta) = -\sin\theta$

Çareserî:

$$\cos(30^\circ + \theta) + \cos(30^\circ - \theta)$$

$$= -2\sin\frac{30^\circ + \theta + 30^\circ - \theta}{2}\sin\frac{30^\circ + \theta - 30^\circ + \theta}{2}$$

$$= -2\sin 30^\circ \sin\theta = -2\times\frac{1}{2}\sin\theta = -\sin\theta$$

PIRSÊN BEŞA DEHEM

1) Encama yên li jê bibîne.

a) $\cos(15^{\circ}), \cos(75^{\circ}), \tan(75^{\circ})$

b) $\cos(3^{\circ}).\cos(42^{\circ}) - \cos(3^{\circ}).\cos(24^{\circ})$

c) $1 - 2\sin^2(22.5^{\circ})$

d) $\cos(67^{\circ})\cos(7^{\circ}) + \cos(23^{\circ}).\cos(83^{\circ})$

2) Hevkêşeya li jêr di $\mathbb{R}$ de çareser bike.

$$\cos(3\theta)\cos(\theta) - \sin(3\theta).\sin(\theta) = -\frac{1}{2} \quad : \theta \in [-\pi, \pi]$$

3) Wekheviyên li jêr tekez bike.

a) $3\sin(\theta) = 2\cos^2(\theta)$

b) $2\sin(2\theta) - 2\cos(\theta) = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin\theta$

c) $\cos(x)\cos(10^{\circ}) - \sin(x).\cos(100^{\circ}) = 1 - \sin^2(x)$

d) $6\sin^2(x) + 2\sin(2x) - 1 = 0$

4) Tekez bike ku:

$$\sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$$

5) Van wekheviyên li jêr tekez bike.

a) $\cos^2(\theta)\left(1 - \tan^2(\theta)\right) = \cos(2\theta)$

b) $4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta = \sin 4\theta$

c) $4\cos^3(\theta) - 3\cos\theta = \cos 3\theta$

d) $\frac{\cos 2x}{(\cos x \sin x)^3} = \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$

FERHENGOK:

Têgeh	Wate
Cîrana hejmar	Eger $\boldsymbol{x_0}$ hejmareke rast be, navbera vekirî $(\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b})\boldsymbol{\Omega} =]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ ya ku $\boldsymbol{x_0}$ endameke jê, jê re **cîrana** hejmara $\boldsymbol{x_0}$ tê gotin.
Diyarkera matrêksê	Her matrêksa bi awayê $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diyarkera wê heye $\boldsymbol{ad - bc}$. Diyarkera matrêksê bi vî awayî tê nivîsandin: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ û sembola wê jî $\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ ye.
Fonksiyona rader	Fonksiyona ku daraştina wê $f(x)$ bi xwe ye
Hejmara dîmen	Ew hejmara ku dama wê (-1) e û sembola wê $\boldsymbol{i}$ ye, $i^2 = -1$ Li gorî vê $i = \sqrt{-1}$
Hejmarên komplêks	Komeke hejmaran e, bi awayê $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ tê nivîsandin ku beşa yekem $\boldsymbol{a}$ hejmareke rast e û beşa duyem $\boldsymbol{bi}$ dîmen e. $\boldsymbol{i} = \sqrt{-\mathbf{1}}$
Hevjimara hejmara komplêks	eger $z = x + iy$ hejmareke komplêks be, hevjimara wê $\bar{z} = x - iy$
Matrêks	Komeke hejmaran e, taybetiyên wan ên hevbeş hene, bi rêz û stûnan û bi awayê milkêşekî di navbera du kevanan de, tên komkirin.
Peyhatî	Hejmar bi awayekî bi rêk û pêk zêde yan jî kêm dibin
Peyhatiya bi dawî	Eger pêkhateyên peyhatiyê bi dawî bin, peyhatî bi dawî ye û eger pêkhateyên peyhatiyê bê dawî bin, peyhatî bê dawî ye.
Peyhatiya geometrî	Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama hevdana pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re $\boldsymbol{d}$ pêk tê
Peyhatiya hejmarî	Dema ku her pêkhateyek (ji bilî ya yekem) ji encama komkirina pêkhateya berî wê bi hejmareke rast û neguhêr re d pêk tê

Plana Belavkirina waneyan (A)

Hefte / Meh	Hefteya yekem	Hefteya duyem	Hefteya sêyem	Hefteya çarem
Îlon			-Komika endaman	-Fonksiyona kit û ya cot
Cotmeh	-Karanînên li ser fonksiyonan -Hevgirtina fonksiyonan	-Pir pêkhate -Pirsên beşa yekem	-Fonksiyona bi hêz -Fonksiyona logarêtm	-Pirsên beşa duyem -Dawiyên fonksiyonê
Mijdar	-Berdewamiya fonksiyonê -Pirsên beşa sêyem	-Daraştin -Guhertinên fonksiyonên hejmarî	-Nêzîker	-Fonksiyona rader
Kanûn	-Pirsên beşa çarem	-Peyhatî	-Peyhatiya geometrî	-Dawiya peyhatiyê
Çile	-Pirsên beşa pêncem	**Ezmûna Dema Yekem**	**Bêhnvedan**	**Bêhnvedan**
Sibat	-Matrêks -Vajiyê matrêksê	-Pirsên beşa şeşem -Dibetî	-Fezaya dibetiya bi dawî û yeksan Dibetiya mercî	-Şemaya bi şax -Dibetiyên serbixwe
Adar	-Hejmarên komplêks -Pirsên beşa heştem	-Tîr û geometriya analîz -Pirsên beşa nehem	-Vegerandina li çariya yekem û hevkêşeyên sêgoşeyî	-Qiraça bi alî
Nîsan	-Hevkêşeyên sêgoşeyî yên sade	-Rêjeyên sêgoşeyî ji komkirin yan jî derxistina du qiraça re	-Wekheviyên sêgoşeyî yên navdar	-Formên guhertinan
Gulan	-Pirsên beşa dehem	**Ezmûna dawiya salê**		

Plana Belavkirina waneyan (B)

Hefte / Meh	Hefteya yekem	Hefteya duyem	Hefteya sêyem	Hefteya çarem
Îlon			-Komika endaman	-Fonksiyona kit û ya cot
Cotmeh	-Karanînên li ser fonksiyonan -Hevgirtina fonksiyonan	-Pir pêkhate -Pirsên beşa yekem	-Fonksiyona bi hêz -Fonksiyona logarêtim	-Pirsên beşa duyem -Dawiyên fonksiyonê
Mijdar	-Berdewamiya fonksiyonê -Pirsên beşa sêyem	-Daraştin -Guhertinên fonksiyonên hejmarî	-Nêzîker -Fonksiyona rader	-Pirsên beşa çarem
Kanûn	-Matrêks	-Vajiyê matrêksê	-Pirsên beşa şeşem	-Tîr û geometriya analîz
Çile	-Pirsên beşa nehem	**Ezmûna Dema Yekem**	**Bêhnvedan**	**Bêhnvedan**
Sibat	-Peyhatî -Peyhatiya geometrî	-Dawiya peyhatiyê -Pirsên beşa pêncem	-Dibetî	-Fezaya dibetiya bi dawî û yeksan Dibetiya mercî
Adar	-Şemaya bi şax -Dibetiyên serbixwe	-Hejmarên komplêks -Pirsên beşa heştem	-Vegerandina li çariya yekem û hevkêşeyên sêgoşeyî	-Qiraça bi alî
Nîsan	-Hevkêşeyên sêgoşeyî yên sade	-Rêjeyên sêgoşeyî ji komkirin yan jî derxistina du qiraça re	-Wekheviyên sêgoşeyî yên navdar	-Formên guhertinan
Gulan	-Pirsên beşa dehem	**Ezmûna dawiya salê**		